פתרון תרגיל 4

שאלה 1

פרקו את הפונקציות הרציונאליות הבאות לשברים חלקיים:

1) $\frac{x^4-3x^3+x^2+4x-1}{x^2-x-1}$

פתרון:

לאחר חלוקה של המונה במכנה נקבל את הפירוק הבא של המונה:

$$x(x-2)\left(x^2-x-1\right)+2x-1$$

ולכן נקבל

$$\frac{x(x-2)\left(x^2-x-1\right)+2x-1}{x^2-x-1}=x(x-2)+\frac{2x-1}{x^2-x-1}$$

נשים לב שהמכנה הוא פולינום פריק, שורשים של המכנה הם: $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

אנחנו נרצה למצוא את הפירוק הבא: $\frac{2x-1}{x^2-x-1}=\frac{B}{x-x_2}+\frac{A}{x-x_1}$

$$A(x-x_2)+B(x-x_1)=2x-1$$

ולכן $(A+B)x-Ax_2-Bx_1=2x-1$

נשווה בין המקדמים של x ונקבל: $A+B=2$ ולכן $A=2-B$, $-Ax_2-Bx_1=-1$

לאחר פתרון של מערכת משוואות מקבלים:

$A=B=1$, ולכן פירוק לשברים חלקיים הוא $\frac{1}{x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+\frac{1}{x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_1}$

2) $\frac{x^5-3x^3+x}{x^2+2x+1}$

פתרון:

כמו מקודם, המונה של המונה יותר גדולה של המכנה ולכן נעשה חלוקה של המונה במכנה ונקבל את הפירוק הבא של המונה:

$\left(x^3-2x^2+2\right)\left(x^2+2x+1\right)-(5x+2)$, ולכן

$$\frac{\left(x^3-2x^2+2\right)\left(x^2+2x+1\right)-(5x+2)}{\left(x^2+2x+1\right)}=\left(x^3-2x^2+2\right)-\frac{5x+2}{x^2+2x+1}=\left(x^3-2x^2+2\right)-\frac{5x+2}{(x+1)^2}$$

נמצא את הפירוק הבא: $\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}=\frac{5x+2}{(x+1)^2}$, נעשה מכנה משותף $A(x+1)+B=5x+2$

נשווה בין המקדמים של החזקות המתאימות של x ונקבל: $A=5$, $A+B=2$, ולכן $B=-3$.

ולכן הפירוק לשברים לחקיים הינו:

$$\frac{5}{x+1}+\frac{-3}{(x+1)^2}$$

3) $\frac{x^n}{x-1}$ n מספר טבעי

פתרון:

כאן מעלה של מונה גדולה או שווה למעלה של המכנה, ולכן אפשר לעשות חילוק פולינומים, או שאפשר להשתמש בנוסחה הבאה:

$$x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+...+1-\frac{x^n-1}{x-1}$$

ולכן נקבל:

$$\frac{x^n-1+1}{x-1}=\frac{x^n-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+....+1+\frac{1}{x-1}$$

4) $\frac{1}{(x-a)(x^2+px+q)}$, $p^2-4q<0$

פתרון:

פולינום x^2+px+q הוא אי פריק (למה?), נרצה למצוא את הפירוק הבא:

$$\frac{A}{x-a}+\frac{Bx+C}{x^2+px+q}=\frac{1}{(x-a)(x^2+px+q)}=\frac{A\left(x^2+px+q\right)+(Bx+C)(x-a)}{(x-a)(x^2+px+q)}$$

נשווה בין המקדמים של החזקות המתאימות של ה־xים ונקבל את מערכת משוואות הבאה:

$$1=(A+B)\,x^2+(Ap-aB+C)\,x+(Aq+aC)$$

ולכן $\begin{cases} A+B=0 \\ Ap-aB+C=0 \\ Aq-aC=1 \end{cases}$

לאחר פתרון של מערכת המשוואות מקבלים:

$$A=\frac{1}{a^2+pa+q},B=\frac{-1}{a^2+pa+q},C=-\frac{p+a}{a^2+pa+q}$$

לסיכום מקבלים את הפירוק הבא:

$$\frac{1}{(a^2+pa+q)(x-a)}-\frac{x+p+a}{(a^2+pa+q)(x^2+px+q)}$$

5) $\frac{x-1}{x^3(x^2+1)}$

פתרון:

נרצה למצוא את הפירוק הבא:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{Dx+E}{x^2+1}=\frac{x-1}{x^3(x^2+1)}$$

נעשה מכנה משותף ונקבל:

$$(A+D)\,x^4+(B+E)\,x^3+(A+C)\,x^2+Bx+C=x-1$$

נשווה בין החזקות המתאימות של x ונקבל את המערכת משוואות הבאה:

$$A+D=0$$

$$B+E=0$$

$$A+C=0$$

$$B=1$$

$$C=-1$$

ולאחר פתרון של מערכת משוואות מקבלים:

$$A=-1,B=1,C=-1,D=-1,E=-1$$

ולכן הפירוק הינו:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{-1}{x^3}-\frac{x+1}{x^2+1}$$

6) $\frac{2x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}$

פתרון:

נרצה למצוא את הפירוק הבא:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}+\frac{Kx+L}{(x^2+x+1)^2}=\frac{2x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}$$

כמו מקודם נבנה מערכת משוואות ונמצא את המקדמים A,B,C,D,K,L.

שאלה 2

חשב את האינטגרלים הבאים:

1) $\int\frac{dx}{2x^2+3x+2}$

פתרון:

$$\int\frac{1}{2}\cdot\frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{3}{4}x+1}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}+\frac{7}{16}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{16}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{7}\cdot\int\frac{dx}{\frac{16}{7}\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+1}=$$

$$\frac{8}{7}\cdot\int\frac{dx}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{3}{4}\right)\right)^2+1}=$$

$$=\frac{8}{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{3}{4}\right)\right)+C$$

2) $\int\frac{x^4dx}{x^3-1}$

פתרון:

מעלה של המונה יותר גדולה מהמעלה של המכנה, ולכן אפשר לחלק את המונה במכנה

ואז נקבל:

$$\int\frac{x\left(x^3-1\right)}{x^3-1}dx+\int\frac{x}{x^3-1}dx=\int xdx+\int\frac{x}{x^3-1}dx$$

נרצה למצוא פירוק לשברים חלקיים של $\frac{x}{x^3-1}$:

$$\frac{A}{(x-1)}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}=\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

מכנה משותף ונקבל:

$$A\left(x^2+x+1\right)+(Bx+C)(x-1)=x$$

נציב $x=1$ ונקבל $A=\frac{1}{3}$.

נציב $x=0$ ונקבל $\frac{1}{3}-C=0$ ולכן $C=\frac{1}{3}$.

נציב למשל $x=-1$ ונקבל: $\frac{1}{3}+\left(-B+\frac{1}{3}\right)\cdot(-2)=-1$ ולכן $B=-\frac{1}{3}$

ולכן $\int xdx+\int\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\int\frac{1}{3}\cdot\frac{x-1}{x^2+x+1}=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}ln\left|x-1\right|-\frac{1}{6}\cdot\left(ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right)+C$

3) $\int\frac{2x+1}{x(x-1)(x+2)}dx$

פתרון:

נעשה פירוק לשברים חלקיים ונקבל:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}=\frac{2x+1}{x(x-1)(x+2)}$$

$$A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)=2x+1$$

נציב $x=0$: $A\cdot(-2)=1$ ולכן $A=-\frac{1}{2}$

נציב $x=1$: $B\cdot3=3$ ולכן $B=1$

נציב $x=-2$: $C\cdot6=-3$ ולכן $C=-\frac{1}{2}$

נחשב את האינטגרל:

$$\int-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{x-1}dx+\int-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2}dx=-\frac{1}{2}\cdot ln\left|x\right|+ln\left|x-1\right|-\frac{1}{2}ln\left|x+2\right|+C$$

4) $\int\frac{dx}{e^{2x}+e^x-6}$

פתרון:

נציב $t=e^x$ ולכן $dt=e^x dx=tdx \leftarrow dx=\frac{dt}{t}$

נציב את הכל באינטגרל ונקבל:

$$\int\frac{dt}{t(t^2+t-6)}$$

נשים לב ש־$t^2+t-6=(x+3)(x-2)$ ולכן נרצה למצוא פירוק לשברים חלקיים של $\frac{1}{t(t+3)(t-2)}$:

$$\frac{A}{t}+\frac{B}{t+3}+\frac{C}{t-2}=\frac{1}{t(t+3)(t-2)}$$

נעשה מכנה משותף ונקבל: $A(t+3)(t-2)+Bt(t-2)+Ct(t+3)=1$

נציב $t=0$: $A\cdot(-6)=1$ ולכן $A=-\frac{1}{6}$

נציב $t=-3$: $B\cdot 15=1$ ולכן $B=\frac{1}{15}$

נציב $t=2$: $C\cdot 10=1$ ולכן $C=\frac{1}{10}$

$\int-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{t}dt+\int\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{t+3}dt+\int\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{t-2}dt = -\frac{1}{6}ln|t|+\frac{1}{15}\cdot ln|t+3|+\frac{1}{10}\cdot ln|t-2|+C=-\frac{1}{6}ln(e^x)+\frac{1}{15}\cdot ln|e^x+3|+\frac{1}{10}\cdot ln|e^x-2|+C$

5) $\int\frac{x^3+2}{(x^2-1)^2}dx$

פתרון:

נעשה פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}=\frac{x^3+2}{(x^2-1)^2}$$

נעשה מכנה משותף ונקבל:

$$A(x-1)(x+1)^2+B(x+1)^2+C(x+1)(x-1)^2+D(x-1)^2=x^2+2$$

נציב $x=1$: ונקבל $B=\frac{3}{4}$

נציב $x=-1$: ונקבל $D=\frac{1}{4}$

נציב $x=0$: ונקבל $C-A=1$

נציב $x=2$: $3A+C=1$

לאחר פתרון של מערכת משוואות מקבלים: $A=0, C=1$

$$\int\frac{3}{4}\cdot\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{1}{4}\cdot\frac{dx}{(x+1)^2}=-\frac{3}{4}\frac{1}{x-1}+ln|x+1|-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}+C$$

6) $\int\frac{dx}{x(x^2+4x+5)^2}$

פתרון:

אחרי שעושים פירוק לשברים חלקיים מגיעים לביטוי הבא:

$$\int\frac{dx}{25x}-\int\frac{1}{25}\cdot\frac{x+4}{x^2+4x+5}-\int\frac{1}{5}\cdot\frac{x+4}{(x^2+4x+5)^2}$$

* $\int\frac{dx}{25x}=\frac{1}{25}\cdot ln|x|+C$

* $-\frac{1}{25}\int\frac{x+4}{x^2+4x+5}dx=-\frac{1}{50}\int\frac{2x+8}{x^2+4x+}dx=-\frac{1}{50}\int\frac{2x+4+4}{x^2+4x+5}dx=$
$=-\frac{1}{50}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx-\frac{-1}{50}\int\frac{4}{x^2+4x+5}dx=-\frac{1}{50}ln(x^2+4x+5)-\frac{1}{50}\int\frac{4}{(x+2)^2+1}=$
$=-\frac{1}{50}ln(x^2+4x+5)-\frac{2}{25}arctan(x+2)+C$
*= $-\frac{1}{5}\cdot\int\frac{x+4}{(x^2+4x+5)^2}=-\frac{1}{10}\int\frac{2x+8}{(x^2+4x+5)^2}=-\frac{1}{10}\int\frac{2x+4+4}{(x^2+4x+5)^2}$
$=-\frac{1}{10}\int\frac{2x+4}{(x^2+4x+5)^2}dx-\frac{2}{5}\cdot\int\frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}$
* $-\frac{1}{10}\int\frac{2x+4}{(x^2+4x+5)^2}=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x^2+4x+5}+C$
* כדי לחשב את $-\frac{2}{5}\int\frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}$ נעשה השלמה לריבוע ונשתמש בנוסחת הנסיגה הבאה:
$G_m=\int\frac{A}{(t^2+a^2)^m}$,
$G_{m+1}=\frac{2m-1}{2ma^2}\cdot G_m+\frac{A}{2ma^2}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^m}$
$G_1=\frac{A}{a}arctan(\frac{t}{a})+C$
אחרי השלמה לריבוע נקבל: $-\frac{2}{5}\int\frac{dx}{\left((x+2)^2+1\right)^2}=-\frac{2}{5}\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}$
במקרה שלנו $m+1=2$ ולכן $m=1$, בנוסף $A=a=1$.
ולכן: $-\frac{2}{5}G_2=\frac{2-1}{2}\cdot G_1+\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{(t^2+1)}=\frac{1}{2}\cdot arctan(t)+\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{(t^2+1)}+C=$
$=\frac{1}{2}\cdot arctan\,(x+2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{x+2}{x^2+4x+5}+C$
ולכן סה"כ האינטגרל הוא:
$\frac{1}{25}\cdot ln\,|x|-\frac{1}{50}\cdot ln\left(x^2+4x+5\right)-\frac{2}{25}\cdot arctan\,(x+2)+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x^2+4x+5}-\frac{1}{5}arctan(x+2)-\frac{1}{5}\cdot\frac{x+2}{x^2+4x+5}+C$

7) $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$

פתרון:

$$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\int\frac{1}{(x-a)(x+a)}dx$$

נעשב פירוק לשברים חלקיים ונקבל:

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{2a}\frac{1}{(x-a)}-\frac{1}{2a}\frac{1}{(x+a)}$$

אינטגרל של הביטוי הזה:

$$\frac{1}{2a}\cdot ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

8) $\int\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx$

פתרון:

מעלה של המונה גדולה יותר מהמעלה של המכנה ולכן נקבל

$$\int\frac{(x+3)\left(x^2+2\right)+(3x+1)}{x^2+2}dx=\int(x+3)\,dx+\int\frac{3x+1}{x^2+2}dx=\frac{x^2}{2}+3x+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{2t}+\int\frac{dx}{x^2+2}$$
$$=\frac{x^2}{2}+3x+\frac{3}{4}\cdot ln\left(x^2+2\right)+arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C$$

9) $\int\frac{x^4}{x^4-1}dx$

פתרון:

$$\frac{x^4}{x^4-1}=\frac{x^4-1+1}{x^4-1}=1-\frac{1}{x^4-1}=1-\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

לאחר פירוק לשברים חלקיים מקבלים:

$$1-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}$$

לאחר אינטגרציה מקבלים:

$$\int 1-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}=x-\frac{1}{4}\cdot ln\left|x-1\right|+\frac{1}{4}\cdot ln\left|x+1\right|+\frac{1}{2}\cdot arctan\left(x\right)+C$$

10) $\int\frac{x^5}{(x^3+1)(x^3+8)}dx$

פתרון:

נסמן $t=x^3$ ולכן $\frac{dt}{3}=x^2dx$ ולכן

$$\int\frac{x^5dx}{(x^3+1)(x^3+8)}=\int\frac{x^3\cdot x^2dx}{(x^3+1)\cdot(t^3+8)}=\int\frac{dt}{3(t+1)(t+8)}=\frac{1}{3}\cdot\left(ln\left|t+1\right|+ln\left|t+8\right|\right)+C=$$

$$\frac{1}{3}\cdot\left(ln\left|x^3+1\right|+ln\left|x^3+8\right|\right)+C$$