פתרון תרגיל בית מספר 4 – ליניארית מדמ"ח

<u>שאלה 1:</u>

תהי $T:V\to W$ הע"ל ויהיו $\{v_1,\dots,v_n\}$ ווקטורים ב- V. הוכיחו או הפריכו:

א. אם T חח"ע ו- $\{v_1,\dots,v_n\}$ בת"ל, אזי $\{T(v_1),\dots,T(v_n)\}$ בת"ל

<u>הוכחה:</u> נתבונן בצ"ל $a_1T(v_1)+\dots+a_nT(v_n)=0$ ונרצה להוכיח ש- $a_1=\dots=a_n=0$. T הע"ל ולכן מתקיים $a_1T(v_1)+\dots+a_nT(v_n)=T(a_1v_1+\dots+a_nv_n)=0$. אך ההעתקה היא חח"ע, ולכן הווקטור היחיד שנשלח לאפס הוא אפס. לכן $a_1v_1+\dots+a_nv_n=0$. הקבוצה $\{v_1,\dots,v_n\}$ היא בת"ל ולכן $a_1=\dots=a_n=0$, כדרוש.

ב. אם $\{v_1,\dots,v_n\}$ בת"ל, אזי $\{T(v_1),\dots,T(v_n)\}$ בת"ל

<u>הפרכה:</u> תהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $T(x,y)=(x,x)$. שני הווקטורים $\{(1,2),(1,1)\}$ הם בת"ל, אך התמונות שלהם לא- $T(1,1)=(1,1)=T(1,2)$.

ג. אם $\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס עבור V ו- $\{T(v_1),\dots,T(v_n)\}$ בסיס עבור W אזי T היא אזומורפיזם.

<u>הפרכה/ הוכחה:</u> שימו לב לבעייתיות בשאלה הזאת: לא נאמר שכל הווקטורים בקבוצה $\{T(v_1),\dots,T(v_n)\}$ הם שונים! אם הם שונים – ניתן להוכיח את הטענה. אנחנו נניח שאין דרישה כזאת ולכן נביא הפרכה: תהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י: $\begin{cases}T(1,0,0)=(1,0)\\T(0,1,0)=(1,0)\\T(0,0,1)=(0,1)\end{cases}$. אזי הקבוצה $\{(0,1),(1,0)\}$ (כ**קבוצה**) היא בת"ל, אך ההעתקה אינה איזומורפיזם (מטעמי מימדים).

<u>שאלה 2</u> :

תהיינה $T:V\to W$, $S:W\to U$ העתקות ליניאריות.

א. הוכיחו כי $\ker(T)\subseteq\ker(S\circ T)$

<u>הוכחה:</u> יהי $x\in\ker T$. אזי $T(x)=0$ ומכיוון ש S הע"ל, מתקיים: $S\circ T(x)=S(T(x))=S(0)=0$. לכן $x\in\ker(S\circ T)$.

ב. נניח בנוסף ש- $S\circ T$ היא העתקת האפס. הוכיחו כי $\operatorname{Im}(T)\subseteq\ker(S)$.

<u>הוכחה:</u> יהי $w\in\operatorname{Im}T$ וצ"ל ש- $S(w)=0$. אם $w\in\operatorname{Im}T$ אזי קיים $v\in V$ כך ש- $T(v)=w$. כעת, $S(w)=S(T(v))=(S\circ T)(v)=0$.

שאלה 3:

יהי V מ"ו ותהי $T:V\to V$ הע"ל המקיימת $T^2=T\circ T=0$. הוכיחו כי $\dim\ker(T)\geq\dfrac{\dim V}{2}$.

הוכחה: לפי משפט הדרגה מתקיים $\dim\operatorname{Im}T+\dim\ker T=\dim V$. $T\circ T$ היא העתקת האפס ולכן לפי סעיף ב' של שאלה קודמת נקבל: $\operatorname{Im}T\subseteq\ker T$ ולכן $\dim\operatorname{Im}T\leq\dim\ker T$. מתקיים: $\dim V=\dim\operatorname{Im}T+\dim\ker T\leq 2\dim\ker T$ ולכן $\dfrac{\dim V}{2}\leq\dim\ker T$, כדרוש.

שאלה 4:

יהי V מרחב ווקטורי מעל F ותהי $T:V\to V$ הע"ל המקיימת $T^3=0$. נתון בנוסף שקיים ווקטור $0\neq v\in V$ כך ש-$T^2(v)\neq 0$.

א. הוכיחו שההעתקה $(I-T)$ היא איזומורפיזם ומצאו את $(I-T)^{-1}$.

ב. הוכיחו כי הקבוצה $\{v,T(v),T^2(v)\}$ היא בת"ל.

רמז לסעיף א': $1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$.

פתרון:

א. על מנת להוכיח שהעתקה היא איזומורפיזם, יש לבדוק את שלוש התכונות: העתקה ליניארית, חח"ע ועל. אך במקרה שלנו זו העתקה ממרחב לעצמו, ולכן מספיק לבדוק אחד משני התנאים האחרונים (משיקולי מימד במשפט הדרגה).
ליניאריות: $(I-T)$ היא ליניארית כהפרש של שתי העתקות ליניאריות (ראיתם בכיתה).
חח"ע: (שקול להראות שהגרעין הוא טריוויאלי) יהי $v\in V$ כך ש- $(I-T)v=0$ ונרצה להראות ש- $v=0$. מתקיים: $v=Tv \;\Leftarrow\; (I-T)v=Iv-Tv=0$. נפעיל T על שני האגפים ונקבל: $Tv=T^2v$. נפעיל T פעם נוספת ונקבל $T^2v=T^3v=0$. לכן $T^2v=0$ ולכן גם $Tv=0$ וכן גם $v=0$ (הצבה לאחור).
לכן $(I-T)$ היא איזומורפיזם.
נמצא את ההעתקה ההופכית: לפי הרמז מתקיים $I-T^3=(I-T)(I+T+T^2)$ ולכן, מכיוון ש- $T^3=0$ נקבל $I=(I-T)(I+T+T^2)$. משמע, ההעתקה ההופכית ל- $(I-T)$ היא $(I+T+T^2)$.

ב. נתבונן בצ"ל $av+bT(v)+cT^2(v)=0$ ונרצה להראות ש- $a=b=c=0$. נפעיל את T על שני האגפים ונקבל: $aT(v)+bT^2(v)+cT^3(v)=aT(v)+bT^2(v)=0$.

נפעיל T פעם נוספת ונקבל: $aT^2(v)+bT^3(v)=aT^2(v)=0$. מכיוון שלפי הנתון $T^2(v)\neq 0$, נקבל $a=0$. באותו אופן מקבלים $b=c=0$ ולכן הקבוצה הנתונה היא בת"ל.

<u>שאלה 5:</u>

יהי $V=\left\{a\cos\theta+b\sin\theta : a,b\in\mathbb{R}\right\}$ מרחב ווקטורי (שאיבריו הן פונקציות של θ). הוכיחו או הפריכו: $V\cong\mathbb{R}^2$.

(שימו לב שאם בחרתם להוכיח את הטענה, עליכם להציג איזומורפיזם <u>ולהוכיח שהוא אכן</u> איזומורפיזם)

<u>פתרון:</u>

הטענה נכונה. נמצא את האיזומורפיזם הדרוש.

הקבוצה $\left\{\cos\theta,\sin\theta\right\}$ מהווה בסיס ל- V (מדוע?), ולכן נגדיר את האיזומורפיזם $T:V\rightarrow\mathbb{R}^2$ (באמצעות משפט ההגדרה) באופן הבא: $\begin{cases}T(\cos\theta)=(1,0)\\T(\sin\theta)=(0,1)\end{cases}$.

הוכחה שזהו אכן איזומורפיזם:

ליניאריות: אין צורך לבדוק כי משפט ההגדרה מבטיח זאת.

חח"ע/ על: נבדוק באמצעות המטריצה המייצגת. מתקיים $[T]=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

קל מאוד לראות שההעתקה היא חח"ע ועל.

(תזכורת: התמונה של ההעתקה נפרשת ע"י העמודות, והגרעין הוא מרחב האפס של המטריצה).