פתרון תרגיל 6 בלינארית 2

תשובה 1

א. תהיינה:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מתקיים:

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן A_1 ו-A_2 מטריצות נילפוטנטיות (מאינדקס 2).

המטריצה A_1+A_2 היא המטריצה:

$$A_1+A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מתקיים:

$$(A_1+A_2)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

ולכן:

$$(A_1+A_2)^k = I \neq O \qquad k=2,3...$$

הווה אומר - A_1+A_2 אינה נילפוטנטית.

המטריצה A_1A_2 היא:

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$(A_1A_2)^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O \qquad k=1,2...$$

הווה אומר - A_1A_2 איננה נילפוטנטית.

ב. תהיינה A_1, A_2 מטריצות מתחלפות. אז נוכל לרשום:

$$(A_1+A_2)^2 = A_1^2 + A_1A_2 + A_2A_1 + A_2^2 =$$

$$= A_1^2 + 2A_1A_2 + A_2^2$$

ובאופן כללי:

$$(A_1+A_2)^n = A_1^n + C_n^1 A_1^{n-1}A_2 + \ldots + A_2^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k A_1^k A_2^{n-k}$$

אם A_1 ו-A_2 מטריצות נילפוטנטיות, אז קיימים מספרים p_1 ו-p_2 כך ש-$A_1^{p_1}=O$, $A_2^{p_2}=O$. יהי $m=\text{Max}(p_1,p_2)$ ואז:
$k\geq m$,

$$A_1^k = A_2^k = O$$

עתה, בעיין בנוסחת הבינום שלעיל ונשים לב, שאם $n=2m$, אז $k\geq m$ או ש-$n-k=2m-k\geq m$. על כל פנים לכל k $(k=0,\dots,2m)$ אחד מן הגורמים A_1^k או A_2^{2m-k} שווה לאפס, ולכן $(A_1+A_2)^{2m}=O$.
עבור A_1A_2 ההוכחה פשוטה יותר. מאחר ש-A_1 ו-A_2 מתחלפות הרי:

$$(A_1A_2)^n = A_1^n A_2^n$$

ולכן אם נבחר $n=\text{Min}(p_1,p_2)$, נקבל כי $A_1^n=O$ או $A_2^n=O$, ולכן גם $(A_1A_2)^n=O$.

ג. תהי T טרנספורמציה נילפוטנטית מאינדקס r, כלומר $T^r=O$ אך $T^{r-1}\neq O$. נגדיר:

$$S = \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \dots + \alpha_n T^n =$$

$$= T(\alpha_1 I + \alpha_2 T + \dots + \alpha_{n-1} T^{n-1}) =$$

$$= TP(T)$$

כאשר:
$P(t) =$
$\alpha_1+\alpha_2 t+\dots+\alpha_{n-1}t^{n-1}$

מאחר ש-T ו-$P(T)$ טרנספורמציות מתחלפות, הרי:

$$S^n = [TP(T)]^n = T^n P(T)^n$$

מכאן נובע כי:

$$S^r = T^r P(T)^r = O\cdot P(T)^r = O$$

ולכן S נילפוטנטית ואינדקס הנילפוטנטיות שלה קטן או שווה r.

תשובה 2

א. על-פי הנתון $T^k=O$ ו-$T^{k-1}\neq O$, ולכן T מאפסת את הפולינום t^k. אם $M(t)$ הפולינום המינימלי של T, אז $M(t)$ מחלק את t^k, ולכן $M(t)=t^i$ כאשר $1\leq i\leq k$. לא ייתכן ש-$i<k$, שכן אז היה $T^i=O$ $(i<k)$, בסתירה לכך ש-$T^{k-1}\neq O$. הווה אומר - הפולינום המינימלי של T הוא t^k.

ב. אילו היה קיים $\theta \neq v \in V$ כך ש-$Tv=\lambda v$ $(\lambda\neq 0)$, אז:
$k=1,2\dots$

$$T^k v = \lambda^k v$$

ולכן $T^k v \neq \theta$, כלומר T^k אינה טרנספורמצית האפס לכל k,
בסתירה לנתון.

ג. ההוכחה נובעת מן השוויון:

$$[T^k] = [T]^k \qquad k=1,2,\ldots$$

ד. שתי מטריצות דומות מייצגות אותה טרנספורמציה לינארית,
ולכן לשתיהן אותו אינדקס נילפוטנטיות השווה (על-פי חלק
ג) לאינדקס הנילפוטנטיות של הטרנספורמציה.
הוכחה אחרת: אם $B=P^{-1}AP$, אז $B^k=P^{-1}A^kP$, לכן $O=B^k$ אם ורק אם
$A^k=O$. ומכאן נובעת הטענה.

שאלה 3

א. תהי:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המשך בדף הבא

החישוב מראה כי $A^2=O$, ולכן בלוק ז'ורדן הגדול ביותר בצורת ז'ורדן של A הוא J_2. מכאן נובע שצורת ז'ורדן של A היא:

$$\begin{pmatrix} J_2 & \\ & J_1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ב. תהי:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = O$$

ולכן בלוק ז'ורדן הגדול ביותר הוא מסדר 3. מכאן שצורת ז'ורדן של B היא:

$$\begin{pmatrix} J_3 & \\ & J_2 \end{pmatrix} \quad \text{או} \quad \begin{pmatrix} J_3 & & \\ & J_1 & \\ & & J_1 \end{pmatrix}$$

כדי להכריע איזו משתי המטריצות הללו היא צורת ז'ורדן של B נחשב את דרגת B. B היא מטריצת מדרגות, ולכן דרגתה שווה למספר שורות לא אפסיות, דהיינו $\rho(B)=2$. על-פי טענה מספר בלוקי ז'ורדן שווה ל- $n-\rho(B)=5-2=3$, ולכן צורת ז'ורדן של B היא:

$$\begin{pmatrix} J_3 & & \\ & J_1 & \\ & & J_1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \hline & & & 0 & \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right)$$

ג. תהי:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כדי לחשב את החזקות של C נתייחס אליה כאל הטרנספורמציה
$T:R^6 \to R^6$ הפועלת על איברי הבסיס הסטנדרטי כלהלן:

$$Tv_1 = \theta \ , \ Tv_2 = v_1 \ , \ Tv_3 = v_2$$

$$Tv_4 = v_1+v_3 \ , \ Tv_5 = v_2+v_4 \ , \ Tv_6 = v_1+v_3$$

מכאן:

$$T^2v_1 = \theta \ , \ T^2v_2 = Tv_1 = \theta \ , \ T^2v_3 = Tv_2 = v_1$$

$$T^2v_4 = Tv_1+Tv_3 = v_2 \ , \ T^2v_5 = Tv_2+Tv_4 = 2v_1+v_3$$

$$T^2v_6 = Tv_1+Tv_3 = v_2$$

ולכן, $T^2\neq O$. נמשיך:

$$T^3v_1 = \theta \ , \ T^3v_2 = T^2v_1 = \theta \ , \ T^3v_3 = Tv_1 = \theta$$

$$T^3v_4 = Tv_2 = v_1 \ , \ T^3v_5 = v_2 \ , \ T^3v_6 = v_1$$

ולכן $T^3\neq O$. נמשיך:

$$T^4v_1 = T^4v_2 = T^4v_3 = T^4v_4 = \theta$$

$$T^4v_5 = Tv_2 = v_1 \ , \ T^4v_6 = \theta$$

ולכן $T^4\neq O$ וברור כי $T^5v_5=Tv_1=\theta$, ולכן $T^5=O$.
אם כן, C נילפוטנטית מאינדקס 5, ולכן צורת ז'ורדן שלה
היא:

$$\begin{pmatrix} J_5 & \\ & J_1 \end{pmatrix}$$

<u>*תשובה 4*</u>

א. יהי $\dim V=6$, ותהי $T:V\to V$ טרנספורמציה נילפוטנטית
המקיימת $T^4=O$ אך $T^3\neq O$. דהיינו, אינדקס הנילפוטנטיות של T
הוא 4. צורות ז'ורדן האפשריות של T (דהיינו של המטריצה
$[T]$ המייצגת את T בבסיס כלשהו של V) הן:

$$\mathrm{diag}\{J_4,J_2\}, \ \ \mathrm{diag}\{J_4,J_1,J_1\}$$

ב. תהי A מטריצה, שהפולינום האופייני שלה הוא t^5. הסדר של A
שווה למעלת הפולינום האופייני, דהיינו A היא מסדר 5.
על-פי משפט קיילי-המילטון $A^5=O$, ולכן A נילפוטנטית
(מאינדקס ≤ 5). צורות ז'ורדן האפשריות עבור A הן:

$$O_{5\times 5}, \ \mathrm{diag}\{J_2,J_1,J_1,J_1\}, \ \mathrm{diag}\{J_2,J_2,J_1\}$$

$$\mathrm{diag}\{J_3,J_2\}, \ \mathrm{diag}\{J_3,J_1,J_1\}, \ \mathrm{diag}\{J_4,J_1\}, J_5.$$

תשובה 5

תהי A מטריצה מסדר 6 המקיימת $A^5=O$ אך $A^4\neq O$. צורת ז'ורדן של A היא:

$$G = \begin{pmatrix} J_5 & \\ & J_1 \end{pmatrix}$$

הדרגה של G שווה ל-4, ולכן גם הדרגה של A שווה ל-4.

תשובה 6

נשים לב כי:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_2$$

בעוד ש-

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

לכן אם:

$$G = \begin{pmatrix} J_2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_2 & & \\ & & & J_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & J_1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

אז מתקיים:

$$G = GC \qquad (2)$$

$$O = CG \qquad (3)$$

המשך בדף הבא

כאשר:

$$C = \begin{pmatrix} \begin{array}{cc|} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline \end{array} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

מספר הבלוקים $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ שווה למספר הבלוקים J_2 במטריצה G.

תהי M מטריצה ריבועית המקיימת $M^2=O$, כלומר אינדקס הנילפוטנטיות של M קטן או שווה 2, ולכן M דומה למטריצת ז'ורדן G מהצורה (1) כלומר:

$$M = P^{-1}GP$$

נציב כאן את (2) ונקבל:

$$M = P^{-1}GCP$$

נגדיר $A=P^{-1}G$, $B=CP$ ונקבל כי:

$$M = AB$$

בעוד ש-

$$BA = (CP)(P^{-1}G) =$$

$$= CG \underset{(3)}{\uparrow}= O$$

כנדרש.

תשובה 7

נתייחס ל-A כאל מטריצה של הטרנספורמציה $T:R^8 \to R^8$ המקיימת:

$$Tv_1 = Tv_6 = Tv_7 = Tv_8 = \theta$$

$$Tv_2 = v_1$$

$$Tv_3 = v_2$$

$$Tv_4 = v_6$$

$$Tv_5 = v_7$$

מכאן נובע כי:

$$(*) \qquad T^2v_i = \theta \qquad i=1,2,4,5,6,7,8$$

$$T^2v_3 = Tv_2 = v_1$$

ומכאן ש-$T^3=O$. הדרגה של A היא 4, ולכן צורות ז'ורדן האפשריות הן:

$$\mathrm{diag}\{J_3,J_3,J_1,J_1\} \qquad \mathrm{diag}\{J_3,J_2,J_2,J_1\}$$

לפי משפט, r_3 - מספר של בלוקי ז'ורדן מסדר 3 - הוא:

$$r_3 = \rho(A^2) - 2\rho(A^3) + \rho(A^4) =$$

$$= \rho(A^2) = 1$$

ראה נוסחה (*).

ולכן צורת ז'ורדן היא:

$$\mathrm{diag}\{J_3,J_2,J_2,J_1\}$$