תרגיל חשב את הדטר' של

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & & 1 & \alpha \\ \vdots & \alpha & \iddots & \alpha & \vdots \\ \alpha & n-2 & \alpha & \vdots & \alpha \\ n-1 & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

פתרון:

נחשב את המטריצה (הדטר' תשתנה ב $(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$)

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & & \alpha & \alpha \\ \vdots & \alpha & \ddots & \alpha & \vdots \\ \alpha & \alpha & \alpha & n-2 & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & n-1 \end{pmatrix}$$

נחסיר את השורה הראשונה משאר השורות ונקבל

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha & & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \alpha & 0 & 0 & n-2-\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & n-1-\alpha \end{pmatrix}$$

נוציא גורם משותף α משורה ראשונה ועמודה ראשונה (הדטר' תשתנה ב α^2) ונקבל

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-\alpha & & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & n-2-\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & n-1-\alpha \end{pmatrix}$$

נפתח לפי שורה אחרונה

$$|A_n| = (-1)^{n+1} \left| \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1-\alpha & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & n-2-\alpha & 0 \end{pmatrix} \right| + (n-1-\alpha)(-1)^{n+n} |A_{n-1}|$$

[חישוב צדדי: לפי פיתוח עמודה האחרונה נקבל כי

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1-\alpha & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & n-2-\alpha & 0 \end{pmatrix} \right| = (-1)^{1+(n-1)} \left| \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & n-2-\alpha \end{pmatrix} \right| = (-1)^n (1-\alpha)\cdots(n-2-\alpha)$$

[

נחזור לתרגיל שלנו

$$\begin{aligned}|A_n| &= (-1)^{n+1}(-1)^n(1-\alpha)\cdots(n-2-\alpha)+(n-1-\alpha)(-1)^{n+n}|A_{n-1}| \\ &= -\prod_{i=1}^{n-2}(i-\alpha)+(n-1-\alpha)|A_{n-1}|\end{aligned}$$

לפי אותה נוסחא נקבל כי

$$\begin{aligned}|A_{n-1}| &= -\prod_{i=1}^{n-3}(i-\alpha)+(n-2-\alpha)|A_{n-2}| \\ |A_{n-2}| &= -\prod_{i=1}^{n-4}(i-\alpha)+(n-3-\alpha)|A_{n-3}| \\ &\vdots \\ |A_{n-k}| &= -\prod_{i=1}^{n-k-2}(i-\alpha)+(n-k-1-\alpha)|A_{n-(k-1)}|\end{aligned}$$

נצרף את הכל ביחד

$$\begin{aligned}|A_n| &= -\prod_{i=1}^{n-2}(i-\alpha)+(n-1-\alpha)|A_{n-1}| \\ &= -\prod_{i=1}^{n-2}(i-\alpha)+(n-1-\alpha)\left(-\prod_{i=1}^{n-3}(i-\alpha)+(n-2-\alpha)|A_{n-2}|\right) \\ &= -\prod_{i=1}^{n-2}(i-\alpha)-(n-1-\alpha)\prod_{i=1}^{n-3}(i-\alpha)+(n-1-\alpha)(n-2-\alpha)|A_{n-2}| \\ &= -\prod_{i=1}^{n-2}(i-\alpha)-(n-1-\alpha)\prod_{i=1}^{n-3}(i-\alpha)+(n-1-\alpha)(n-2-\alpha)\left(-\prod_{i=1}^{n-4}(i-\alpha)+(n-3-\alpha)|A_{n-3}|\right) \\ &= -\prod_{i=1}^{n-2}(i-\alpha)-(n-1-\alpha)\prod_{i=1}^{n-3}(i-\alpha)-(n-1-\alpha)(n-2-\alpha)\prod_{i=1}^{n-4}(i-\alpha) \\ &\quad +(n-1-\alpha)(n-2-\alpha)(n-3-\alpha)|A_{n-3}| \\ &\vdots \\ &= -\prod_{i=1}^{n-2}(i-\alpha)-(n-1-\alpha)\prod_{i=1}^{n-3}(i-\alpha)-\ldots-(n-1-\alpha)(n-2-\alpha)\cdots(n-k-\alpha)\prod_{i=1}^{n-k-2}(i-\alpha) \\ &\quad +(n-1-\alpha)(n-2-\alpha)\cdots(n-(k+1)-\alpha)\left|A_{n-(k+1)}\right|\end{aligned}$$

נבחר $k=n-3$ ונקבל

$$|A_n| = -\prod_{i=1}^{n-2}(i-\alpha)-(n-1-\alpha)\prod_{i=1}^{n-3}(i-\alpha)-\ldots-(n-1-\alpha)(n-2-\alpha)\cdots(3-\alpha)\prod_{i=1}^{1}(i-\alpha)$$

$$+(n-1-\alpha)(n-2-\alpha)\cdots(2-\alpha)|A_2|$$

כעת

$$|A_2|=\left|\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1-\alpha\end{pmatrix}\right|=-1$$

ולכן

$$\begin{aligned}|A_n| &= -\prod_{i=1}^{n-2}(i-\alpha)-(n-1-\alpha)\prod_{i=1}^{n-3}(i-\alpha)-\ldots-(n-1-\alpha)(n-2-\alpha)\cdots(3-\alpha)(1-\alpha)\\ &\quad -(n-1-\alpha)(n-2-\alpha)\cdots(n-(n-2)-\alpha)\end{aligned}$$

בכל מחובר יש מכפלה של $n-2$ מחוברים. ניתן לרשום זאת כך:

$$|A_n|=-\left(\sum_{\substack{I\subset\{1,2,\ldots n-1\}\\ |I|=n-2}}\prod_{i\in I}(i-\alpha)\right)$$

לכן התשובה הסופית היא

$$-(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\alpha^2\left(\sum_{\substack{I\subset\{1,2,\ldots n-1\}\\ |I|=n-2}}\prod_{i\in I}(i-\alpha)\right)$$