הרצאה 7

תזכורת - יהי V מ"ו

קבוצה פורשת: $Span(S)=V$

(כלומר כל וקטור ב-V ניתן להציג כצ"ל של איברי S)

$$Span(S_1\cup S_2)=Span(S_1)+Span(S_2)$$

קבוצה בת"ל: לא קיים צ"ל לא טריוויאלי שמתאפס:

$$\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n=0$$

טריוו $\leftarrow (\alpha_1=\dots=\alpha_n=0)$

$\boxed{\text{בסיס = פורשת + בת"ל}}$

[משפט ההצגה היחידה - לכל $v\in V$ יש הצגה יחידה כצ"ל של וקטורי הבסיס.]

ראינו שלכל מ"ו יש בסיס.

$\Leftarrow$ מה הקשר בין הבסיסים השונים של אותו מרחב?

חוקי

ראינו טענה המאפשרת לשלוף בסיס מתוך קבוצה פורשת ב-F^n.

טענה: $v_1,\dots,v_m\in F^n \Leftarrow$

הווקטורים המתאימים למשתנים התלויים (לאחר דירוג) מהווים בסיס ל $\mathrm{Span}_F\{v_1,\dots,v_m\}$ $\leftarrow$ $\begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_m \\ | & & | \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

<u>הוכחה</u>: נניח כי $v_{i_1},\dots,v_{i_k}$ הם הווקטורים המתאימים למשתנים התלויים. לאחר דירוג:

$$\begin{bmatrix} | & & | \\ v_{i_1} & \cdots & v_{i_k} \\ | & & | \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{דירוג}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & - & - & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & - & - & 0 \end{bmatrix}$$

<u>צ"ל</u>: אילו $\{v_{i_1},\dots,v_{i_k}\}$ ת"ל אז יש פתרון לא טריוויאלי למע' ההומ':

$$\begin{bmatrix} | & & | \\ v_{i_1} & \cdots & v_{i_k} \\ | & & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_k\end{bmatrix}=\vec{0}$$

אבל דירוג שומר על מרחב הפתרונות. ולכן:

$$\begin{bmatrix}0\\ \vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} \uparrow \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

נחשב

קיבלנו $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$, כלומר הפתרון טריוו׳.

מסקנה: $\{v_{i_1},\dots,v_{i_k}\}$ אוסף בת״ל.

<u>מדוע פורשת?</u> לכל הצבה של כל המשתנים החופשיים יש פתרון יח׳ למשתנים התלויים (המשך ההוכחה).

בפרט, יהי <u>x_j משתנה חופשי</u>. נציב:

$$x_j = -1 \quad , \quad \underbrace{x_l = 0}$$

לכל משתנה חופשי אחר.

ישנו פתרון:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_m \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \underbrace{\alpha_{i_1} v_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k} v_{i_k}}_{\text{צ״ל של המשתנים התלויים}} + (-1) \cdot v_j$$

$$\Rightarrow v_j = \alpha_{i_1} v_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k} v_{i_k}$$

לכן כל v_j המתאים למשתנה חופשי שייך ל- $\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{v_{i_1},\dots,v_{i_k}\}$

ולכן:

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{v_1,\dots,v_m\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{v_{i_1},\dots,v_{i_k}\}$$

תומר פרלשטין, כנרת

מ.ש.ל.

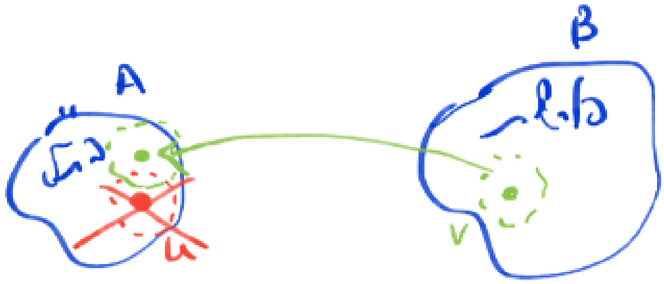
מה הקשר בין בסיסים שונים לאותו מרחב וקטורי?

הלמה של שטייניץ. (למת ההחלפה) (Lemma = משפט-עזר)

יהי V מ"ו ונניח:

- $A\subseteq V$ בת"ל
- $B\subseteq V$ פורשת (סופית)

אזי לכל $u\in A$ יש $v\in B\setminus(A\setminus\{u\})$ כך ש- $(A\setminus\{u\})\cup\{v\}$ בת"ל.



תומר:
[ניתן להחליף כל וקטור בקב׳ בת"ל עם וקטור (חדש) מקב׳ פורשת נתונה וזאת מבלי לפגוע בבת"ל! (כלומר A תישאר בת"ל.)]

למשל ב-$\mathbb{F}^3$:

$$A=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\},\qquad B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\right\}$$

בת"ל   פורשת

$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$u=\binom{\cdot}{0}$ | $u=(0)$

$A'=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל | $A'=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ ת"ל

<u>הוכחת הלמה:</u>

נניח:

$A=\{w_1,\dots,w_m,u\}$ בת"ל

$B=\{v_1,\dots,v_n\}$ פורש

מעוניינים להחליף את u בוקטור חדש מ-B כך שעדיין A תהיה בת"ל.

$(=\beta_1v_1+\dots+\beta_nv_n)$

<u>נניח בשלילה</u> שלא ניתן להחליף בוקטור חדש:

<u>לכל</u> $v\in B\setminus(A\setminus\{u\})$ מתקיים ש-

<u>$(A\setminus\{u\})\cup\{v\}$ ת"ל.</u>

כלומר: יש צ"ל לא טריוויאלי המתאפס.

אבל $A\setminus\{u\}$ היא בת"ל (כי מוכל ב-A) ולכן המקדם של v באותו צ"ל בהכרח $\neq 0$, ואז נעביר אגפים:

$$v\in \mathrm{Span}_F(A\setminus\{u\})$$

אבל זה נכון (לפי ההנחה בשלילה) <u>לכל</u> $v_1,\dots,v_n\in B$:

$$\boxed{\exists \alpha_{ij} \in \mathbb{F} : \quad v_i = \sum_{j=1} \alpha_{ij} w_j \qquad 1 \le i \le n} \quad (1)$$

$$\left(A \setminus \{u\} = \{w_1, \dots, w_m\} \right)$$

נזכר כי B פורשת:

ידוע כי B פורשת $\Leftarrow$

$$(2) \quad \boxed{\exists \beta_i : u = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i}$$

נסיק:

$$\underline{u} \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} w_j \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \beta_i \alpha_{ij} \underline{\underline{w_j}}$$

אם נעביר אגפים נקבל:

$$u - \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_{ij} \right) w_j = 0$$

קיבלנו צירוף לינארי לא טריוויאלי של וקטורי A השווה לאפס, בסתירה לכך ש-A בת"ל.

לכן, ההנחה בשלילה הייתה לא נכונה: ולכן קיים $v \in B \setminus (A \setminus \{u\})$ כך ש-$(A \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ בת"ל, כנדרש.

מ.ש.ל.

מסקנה: אם B_1, B_2 שניהם בסיסים של מ"ו V אז:

$$|B_1| = |B_2| .$$

הוכחה: נניח בשלילה:

$$\begin{cases} B_1 = \{v_1, \dots, v_n\} \\ B_2 = \{w_1, \dots, w_{n+k}\} \end{cases} \qquad (k \geq 1)$$

B_2 בסיס $\Leftarrow$ בת"ל
B_1 בסיס $\Leftarrow$ פורשת

מלמת שטייניץ ניתן להחליף כל איבר של B_2 עם איזשהו איבר.. מבה [?] של B_1, ועדיין B_2 תהיה בת"ל.

$$B_2 = \{w_1, \dots, w_{n+k}\}$$

$\downarrow$ נחליף את w_1

$$(1 \leq i_1 \leq n) \qquad B_2' = \{v_{i_1}, w_2, \dots, w_{n+k}\}$$

$\downarrow$ נחליף את w_2

$$(1 \leq i_2 \leq n) \qquad B_2'' = \{v_{i_1}, v_{i_2}, w_3, \dots, w_{n+k}\}$$

$\downarrow$

$\vdots$

נקבל לאחר $\underline{n}$ צעדים:

$$B_2^{\overbrace{''\cdots'}^{n}} = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_n}, w_{n+1}, \dots, w_{n+k}\}$$

כבר לא ניתן להחליף בווקטור חדש מתוך B_2!

במילים: אם החלפנו $n+1$ וקטורים בווקטורים מתוך B_1, שהיא קבוצה בת n וקטורים, בהכרח אחד מהם יחזור על עצמו, סתירה לכך שבכל שלב B_2 עדיין בת"ל.

מ.ש.ל.

<u>הגדרה</u>: ראינו שלכל מ"ו יש בסיס, וראינו שכל הבסיסים באותו גודל.

יהי V מ"ו. נגדיר את <u>המימד של V</u>:

$$\dim_{\mathbb{F}} V := \underbrace{\text{גודל הבסיס של } V}$$ (dimension)

<u>דוגמאות</u>:

① $$\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^n = n$$

כי ראינו את הבסיס הסטנדרטי: $\{e_1, \dots, e_n\}$.

② $$\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}_d[x] = d+1$$

כי יש לנו בסיס: $\{1, x, \dots, x^d\}$.

③ $$\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^{n \times m} = nm$$

$$
\begin{array}{c}
i \rightarrow \\
\end{array}
\begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} =: e_{ij}
$$
$$\begin{array}{c} \uparrow \\ j \end{array}$$

$\left\{ e_{ij} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m \end{array} \right\}$ בסיס.

<u>טענה</u>: יהי V מ"ו (נוצר סופית). $V = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(S)$.

① A בת"ל $\Leftarrow$ קיימת $A \subseteq B$, B בסיס. (השלמה לבסיס)

② A פורשת $\Leftarrow$ קיימת $B \subseteq A$, B בסיס.

"Bottom up" "Top down"

<u>הוכחה:</u>

① תהי A בת"ל ונרצה להשלים אותה לבסיס.

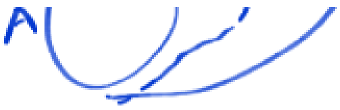
נסתכל ב- $\underbrace{A \cup S}_{\text{קב' סופית}}$. נבחר תת-קב' של $A \cup S$

שמכילה את A, והיא בת"ל ומקסימלית לגבי הכלה

בין כל הקבוצות הבת"ל, נסמנה B.

ברור כי B <u>בת"ל</u>.

<u>נוכיח</u> כי B פורשת:



נניח בשלילה: $\operatorname{Span} B \subsetneq \underbrace{\operatorname{Span} S}_{(V)}$

כלומר, $S \not\subseteq \operatorname{Span} B$ (אחרת, $\operatorname{Span} S = \operatorname{Span} B$).

נבחר $v \in S \setminus \operatorname{Span} B$ ונסתכל ב- $B \cup \{v\}$.

אזי $B \subsetneq B \cup \{v\}$ אבל זו בת"ל:

אם היא בת"ל אזי [illegible]:

$B = \{u_1, \dots, u_n\}$

$$\alpha v + \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i = 0$$

אם $\alpha \neq 0$ $\Leftarrow$ קיבלנו $v \in \operatorname{Span} B$ סתירה.

אם $\alpha = 0$ $\Leftarrow$ קיבלנו צ"ל של וקטורי $\sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i = 0$ של B, סתירה לכך ש-B בת"ל.

וזאת סתירה למקסימליות של B בתור קבוצה בת"ל.

לכן B פורשת ובת"ל, לכן בסיס.

> הערה: הוכחנו שקב' בת"ל מקסימלית היא פורשת (ולכן בסיס).
> ביחס ל $\subseteq$

② A פורשת, נבחר תת-קב' $B \subseteq A$ מינימלית שעדיין פורשת. נוכיח כי B בסיס.

ברור כי B פורשת, נראה כי B בת"ל.

נניח בשלילה כי B ת"ל

$B = \{u_1, \dots, u_n\}$

ת"ל לא-טריויאלי: $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0$

נבחר $\alpha_i \neq 0$ ולכזה נעביר אגף:

$$\alpha_i u_i = -\alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_{i-1} u_{i-1} - \alpha_{i+1} u_{i+1} - \dots - \alpha_n u_n$$

$$\left[\ u_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} u_1 - \dots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} u_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} u_{i+1} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} u_n\right.$$

כלומר: $u_i \in \mathrm{Span}_F(B \setminus \{u_i\})$ לכן,

$$V \underset{\uparrow}{=} \mathrm{Span}\, B = \mathrm{Span}(B\setminus\{u_i\}) + \mathrm{Span}\{u_i\} = \mathrm{Span}(B \setminus \{u_i\})$$

B פורשת

כלומר: $B\setminus\{u_i\}$ קב׳ פורשת, בסתירה לכך ש-B מינימלית שכזו פורשת.

לכן, B פורשת ובת"ל, כלומר בסיס, כנדרש.

מסקנה: קב׳ פורשת מינימלית היא בת"ל ולכן בסיס.

מ.ש.ל.

מסקנות:

1. יהי V מ"ו. אם S פורש ו- T בת"ל אז:
$$|S| \geq |T|$$

הוכחה: נבחר בסיסים $B_1 \subseteq S$ (תת-קב' בסיס)
$T \subseteq B_2$ (השלמה לבסיס)

ראינו של הבסיסים אותו גודל ולכן:
$$|T| \leq |B_2| = |B_1| \leq |S|.$$
מ.ש.ל.

2. אם $W \leq V$ תמ"ו אז: $\dim_{\mathbb{F}} W \leq \dim_{\mathbb{F}} V$.

הוכחה: יהי B בסיס של W. בפרט, B בת"ל. לכן לפי הלמה ניתן להשלים את B לבסיס של V:
$$B \subseteq \underbrace{B'}_{\text{בסיס של } V}$$

לכן:
$$\dim_{\mathbb{F}} W = |B| \leq |B'| = \dim_{\mathbb{F}} V.$$
מ.ש.ל.

3. אם $W \leq V$ תמ"ו ומתקיים $\dim_{\mathbb{F}} W = \dim_{\mathbb{F}} V$ אז $W = V$.

הוכחה: יהי R בסיס ל- W בפרט R בת"ל

לכן נשלים את B לבסיס של V:

$$B \subseteq B'$$

בסיס של V

$$|B| = \dim_{\mathbb{F}} W = \dim_{\mathbb{F}} V = |B'|$$

בסיס של W בסיס של V

מסקנה – $B = B'$ ולכן $W = Span(B) = Span(B') = V$.

מ.ש.ל.

11^{00}

<u>משפט</u> ("השלושה תנאים")

נניח V מ"ו, $S \subseteq V$ תת-קבוצה.

נניח $\dim_{\mathbb{F}} V = n$.

אז אם שני תנאים מתקיימים אז התנאי השלישי מתקיים:

① $|S| = n$

② S <u>פורשת</u> את V

③ S <u>בת"ל</u>

ואז S בסיס.

<u>הוכחה:</u>

$\boxed{1,2 \Rightarrow 3}$: $Span(S) = V$, $|S| = n$.

לפי הלמה מקודם ניתן לבחור ל-S תת קב' פ.ש.- מינימלית ⟸ בסיס, נקרא לה B:

$$B \subseteq S$$

$$|B| = \dim_{\mathbb{F}} V = n = |S|$$

$$\Downarrow$$

$B = S$, לכן S בסיס.

$\boxed{1,3 \Rightarrow 2}$: S בת"ל, $|S| = n$.

לפי הלמה מקודם, יש $S \subseteq B$, B בת"ל מקס' ולכן בסיס.

$$S \subseteq B$$

$$|S| = n = \dim_{\mathbb{F}} V = |B|$$

$$\Downarrow$$

$B = S$, לכן S בסיס.

$\boxed{2,3 \Rightarrow 1}$: S פורשת ובת"ל. לכן היא בסיס, ולפי ההגדרה: $n = \dim_{\mathbb{F}} V = |S|$.

מ.ש.ל.

מסקנה:

תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ריבועית. אזי עמודותיה בת"ל

אופק עמודותיה פורשות את $\mathbb{F}$ (אופק הפיכה).

הערה: הוכחנו את זה בעבר אך זה נובע כבר באופן מיידי מהשלושה חינם.

הסבר: $\{C_1(A),\dots,C_n(A)\}$, $n=\dim_{\mathbb{F}}\mathbb{F}^n$

ולכן מהשלושה חינם קב' בת״ל $\iff$ פורשת. מ.ש.ל.

הגדרה:

$$\operatorname{rank}(A):=\dim_{\mathbb{F}} C(A)$$

דרגה

$$C(A)=\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\{C_1(A),\dots,C_m(A)\}$$

בדומה, מרחב השורות:

$$R(A)=\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\{R_1(A),\dots,R_n(A)\}$$

מתברר כי

$$\operatorname{rank}(A)=\dim_{\mathbb{F}} R(A)$$

(משפט שורה בהמשך).

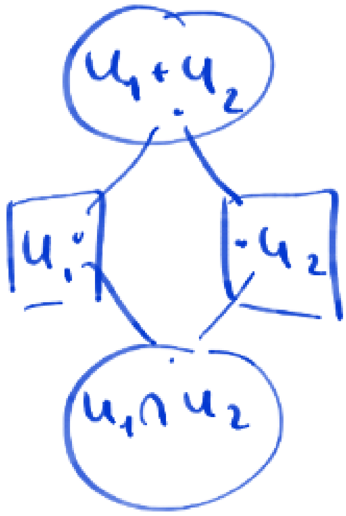
בפרט, אם $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אז A הפיכה אמ״מ:

$$\operatorname{rank}(A)=\dim_{\mathbb{F}} C(A)=n$$

(כי A הפיכה אמ״מ עמודותיה בסיס ל־$\mathbb{F}^n$, ולכן פורשות את $\mathbb{F}^n$, כלומר ממד מרחב העמודות $= n$.)

<u>משפט המימדים</u>: יהי V מ״ו, $U_1,U_2\le V$ תמ״וים. אזי:

$$\dim(U_1+U_2)=\dim U_1+\dim U_2-\dim(U_1\cap U_2)$$



דוגמת "בצבעים": $\mathbb{F}^3$

$$U_1=\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$$U_2=\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

מהו ממד החיתוך?

* ראינו כי $U_1+U_2=\mathbb{F}^3$ (תמש),

$$\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\-1&1&0&-1\\0&2&2&1\end{pmatrix}$$ מדרגים $\Leftarrow$ (3 משתנים תלויים.)

* מחשבים: $\dim U_1=\dim U_2=2$ (בודקים.)

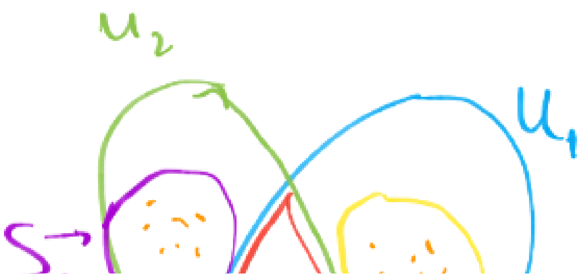
* מסיקים ממשפט המימדים:

$$\dim(U_1\cap U_2)=2+2-3=1$$

הערה: מס' המשתנים התלויים בצורה מדורגת של $\begin{bmatrix}|&&|\\v_1&\cdots&v_m\\|&&|\end{bmatrix}$ (ב- $\mathbb{F}^n$) שווה בדיוק $\dim_{\mathbb{F}}\mathrm{Span}\{v_1,\dots,v_m\}$

הוכחת משפט המימדים:

יהי $B=\{u_1,\dots,u_r\}$ בסיס ל- $U_1\cap U_2$.



נשלים את B לבסיס של U_1:

$$B_1 = B \cup S_1 = \{u_1,\dots,u_n, \overbrace{v_1,\dots,v_m}^{S_1}\}$$

בדומה, נשלים את B לבסיס של U_2:

$$B_2 = B \cup S_2 = \{u_1,\dots,u_n, \overbrace{w_1,\dots,w_k}^{S_2}\}$$

כעת, נגדיר כי:

$$T := B \cup S_1 \cup S_2 = \{u_1,\dots,u_n, v_1,\dots,v_m, w_1,\dots,w_k\}$$

הינו בסיס של U_1+U_2.

⊙ T פורש את U_1+U_2:

$$\mathrm{Span}(T) = \mathrm{Span}(B \cup S_1 \cup S_2) =$$

$$= \mathrm{Span}\left((B \cup S_1) \cup (B \cup S_2)\right) =$$

Span של איחוד = סכום ה-Span-ים

$$= \mathrm{Span}(\overbrace{B \cup S_1}^{B_1}) + \mathrm{Span}(\overbrace{B \cup S_2}^{B_2}) = U_1 + U_2$$

B_1 בסיס של U_1

B_2 בסיס ל-U_2

⊛ T בת"ל: נניח בשלילה ש-T ת"ל.

$$T=\{u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_m,w_1,\dots,w_k\}$$

ז"א צ"ל לא טריוויאלי:

$$(*)\qquad \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i}_{u}+\underbrace{\sum_{i=1}^{m}\beta_i v_i}_{v}+\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\gamma_i w_i}_{w}=0$$

נסמן:

אם $v=0$, נקבל צ"ל $\overset{\text{מאפסים}}{\text{לא-טריוויאלי}}$ של $\underset{\{u_1,\dots,u_n,w_1,\dots,w_k\}}{\overset{}{B_2}}$

וזה לא ייתכן, כי B_2 בסיס.

לכן, $\underline{v\neq 0}$. נעביר אגפים במשוואה $(*)$:

$$v=-u-w$$

כי צ"ל של $(v_1,\dots,v_m)$ שייך ל-$\underline{U_1}$

$-u\in U_1\cap U_2$

$-w\in U_2$

$\Rightarrow -u-w\in U_2$

לכן, $0\neq v\in U_1\cap U_2$. נגיע לסתירה כי v

צ"ל של איברי הבסיס $\overline{B}$ (שהוא בסיס ל-$U_1\cap U_2$):

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\beta_i v_i =\right) v = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j u_j$$

$$\left(B=\{u_1,\dots,u_n\}\right)$$

קיבלנו צ"ל לא טריוויאלי של איברי הבסיס B_1:

$$B_1=\{u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_m\}$$

$$\overbrace{\beta_1 v_1+\dots+\beta_m v_m}^{v}-\lambda_1 u_1-\dots-\lambda_n u_n=0$$

(זהו צ"ל לא טריוויאלי, כי $v\neq 0$ ולכן לא "כל" של ה-β_i" הם 0.)

זו סתירה לכך ש-B_1 בסיס.

לכן, $T=\{u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_m,w_1,\dots,w_k\}$ בת"ל.

סה"כ: T בסיס ל-U_1+U_2. לכן:

$$\underline{\dim(U_1+U_2)}=|T|=n+m+k=$$

$$=(n+m)+(n+k)-n=$$

$$= |B_1| + |B_2| - |B| =$$

$$= \underline{\dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)}$$

מ.ש.ל.   קהל.

<u>הערה:</u> נניח $U_1, U_2 \le V$ והסכום שלהם ישר $U_1 \oplus U_2$.

$$\boxed{\dim(U_1 \oplus U_2) = \dim U_1 + \dim U_2} - \dim(U_1 \cap U_2)$$

$$0$$

(למעשה, זה אפס.)

<u>דוגמה:</u> נעבוד ב- $V = \mathbb{F}^{n\times n}$.

$$\dim_{\mathbb{F}} V = n^2$$

$U_1 =$ מרחב המט' המשולש עליון

$U_2 =$ -"- -"- תחתון

$U_1 \cap U_2 =$ מט' אלכסוני

$U_1 + U_2 = \mathbb{F}^{n\times n}$

$\dim_{\mathbb{F}} U_1 =$

$n(n+1)$

$$\begin{pmatrix} \times & \cdots & \times \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \times \end{pmatrix} \qquad 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

למשל: $\{e_{ij} \mid i \leq j\}$ בסיס ל-U_1

$$\dim_{\mathbb{F}} U_2 = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

למשל: $\{e_{ij} \mid i \geq j\}$ בסיס ל-U_2.

$$\dim(U_1+U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

$\dim(U_1 \cap U_2)$: מט' אלכסוניות

$$n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - n$$

בהתאם למשפט המימדים.

קואורדינטות

V מ"ו, $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ בסיס.

יהי $v \in V$, **הקואורדינטות של v לפי B**:

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$$

וקטור הקוא': $(\alpha_1 \; \cdots \; \alpha_n)$.

חישוב וקטור קואורדינטות ב- $\mathbb{F}^n$:

$$\left[\underbrace{\begin{array}{ccc} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \end{array}}_{A} \left|\ \begin{array}{c} | \\ v \\ | \end{array}\right.\right] \xrightarrow{\text{דירוג}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{array} \left|\ \underbrace{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}}_{\text{וקטור הקואורדינטות}}\right.\right]$$

במילים אחרות, פתרון המע' $Ax = v$.

<u>דוגמה</u> – ב- $\mathbb{F}^2$ יהי הבסיס:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מהו וקטור הקואו' של $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ביחס ל- B?

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{array}\right)$$

כלומר:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1/3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (-2/3) \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

<u>דוגמה נוספת</u>: ב- $\mathbb{F}_2[x]$ בסיס:

$$B = \{ \underbrace{1+x^2}_{P_1}, \underbrace{-x-x^2}_{P_2}, \underbrace{1+x}_{P_3} \}$$

וקטורי הקואורדינטות של P_1, P_2, P_3 לפי הבסיס

הסטנדרטי $\{1, x, x^2\}$ הם:

$$p_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad p_3 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כתבו את $1+x+x^2$ כצ"ל של p_1, p_2, p_3.

פתרון: מדרג הקואורדינטות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right)$$

כלומר:

$$1+x+x^2 = 1/2 \cdot p_1(x) + (-1/2) \cdot p_2(x) + 1/2 \cdot p_3(x).$$

<u>הגדרה:</u> יהיו B_1, B_2 בסיסים למ"ו V.

<u>מט' המעבר בין הבסיסים B_2 ו- B_1</u>:

סימון:

$B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$

$B_2 = \{u_1, \dots, u_n\}$

$$[I]^{B_2}_{B_1} = \begin{bmatrix} \Big| & \Big| & \cdots & \Big| \end{bmatrix}$$

וקטור הקוא' של u_1 לפי B_1

וק' הקוא' של u_2 לפי B_1

וקטור הקוא' של u_n לפי B_1

<u>דוגמה</u>: מהי מט' המעבר מ-B_2 ל-B_1 כאשר

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \ ?$$

$$[I]^{B_2}_{B_1} = \begin{bmatrix} & & \\ & ? & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{נדרג}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & ? \end{array} \right)$$

$$\underbrace{}_{B_1} \quad \underbrace{}_{B_2}$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1 \end{array}\right)$$

כלומר: וק' הקוא' של $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ביחס ל-B_1 הינו:

$$\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

וק' הקוא' של $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ביחס ל-B_1 הינו:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ולכן מט' המעבר מ-B_2 ל-B_1 הינה:

$$[I]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 \\ 1/3 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>הערה:</u> נניח B_1, B_2 בסיסים.

$B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$

$B_2 = \{u_1, \dots, u_n\}$

יהי $v \in V$ וקטור. נניח כי וקטור הקוא' של v ביחס ל-B_1 הינו:

המשך

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

אז וקטור הקוא' של v ביחס ל-B_2 הינו:

$$[I]^{B_1}_{B_2} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

<u>הוכחה:</u> וק' הקוא' של v ביחס ל-B_1 נתון:

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

נחזור להגדרה של $[I]^{B_1}_{B_2}$:

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \vdots \\ \beta_{n1} \end{bmatrix} \leftarrow \quad v_1 = \beta_{11} u_1 + \dots + \beta_{n1} u_n$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad (*)$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{1n} \\ \vdots \\ \beta_{nn} \end{bmatrix} \leftarrow \quad v_n = \beta_{1n} u_1 + \dots + \beta_{nn} u_n$$

כלומר:

$$[I]^{B_1}_{B_2} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix}$$

ולכן:

$$[I]^{B_1}_{B_2} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11}\alpha_1 + \dots + \beta_{1n}\alpha_n \\ \vdots \\ \dots \end{bmatrix} \quad (\#)$$

$$\left[\beta_{n1}\alpha_1 + \dots + \beta_{nn}\alpha_n\right]$$

ונניח שלמה אין רק קואורד' של v ביחס ל-B_2:

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \overset{(*)}{=}$$

$$= \alpha_1(\beta_{11}u_1 + \dots + \beta_{n1}u_n) +$$

$$\vdots$$

$$+ \alpha_n(\beta_{1n}u_1 + \dots + \beta_{nn}u_n) =$$

$$= (\alpha_1\beta_{11} + \dots + \alpha_n\beta_{1n})u_1 + \dots + (\alpha_n\beta_{1n} + \dots + \alpha_n\beta_{nn})u_n$$

וקיבלנו שאלו הקוא' של v ביחס ל-B_2

הוא אינו (#), סתירה. מ.ש.ל.

חישוב מט' מעבר:

(B_1 - ל B_2)

$$B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$$
$$B_2 = \{u_1, \dots, u_n\}$$
$$\Downarrow$$
$$u_1 = \alpha_{11}v_1 + \dots + \alpha_{n1}v_n$$
$$\vdots$$
$$u_n = \alpha_{1n}v_1 + \dots + \alpha_{nn}v_n$$
$$\Downarrow$$
$$[T]^{B_2} \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \end{bmatrix}$$

$$[L]_{B_1} = \begin{bmatrix} \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$