תזכורת

למפה $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ יש מטריקה - g_{ij} - שמגדירה את המכפלה הסקלרית של וקטורים במפה(ולכן גם את האורכים) ע"י $\langle u, v\rangle = g_{ij}u^iv^j$.

יש גם מיפוי מהמשטח לכדור היחידה שנותן את הנורמל

נגזרות המשטח מקיימות

$$r_{,ij} = \Gamma^k{}_{ij}x_{,k} + b_{ij}\hat{n}$$

כאשר

$$\Gamma^k{}_{ij} = \frac{1}{2}g^{km}\left(g_{mi,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m}\right)$$

b_{ij} אומר איך הנורמל משתנה

קו גאוזדי

קווים גאוזדיים הם הכללה של קו ישר למרחבים כלליים.

הגדרה

ניתן להגדיר את הגאוזיות בשתי דרכים שקולות:

I. מינימום לוקלי של המרחק בין שתי נקודות

II. המשיק בכל נקודה מקביל, במובן שההיטל של המשיק על המישור המשיק בנקודה קרובה שווה להיטל בנקודה עצמה. כלומר:

עקומה γ על המפה מוגדרת $\gamma(t) : \mathbb{R} \to U$.

המיפוי של המשטח U הוא $r(u) : U \to M$ - מיפוי של המפה למציאות.

$r(\gamma(t))$ אומר לנו איפה העקומה נמצאת בכל זמן נתון t.

$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \in T_aM$ - וקטור המהירות, נמצא בנקודה מסויימת a.

כדי שהעקומה γ תהיה גאוזדית, הדרישה היא

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right) \perp T_aM$$

נפתח:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \perp v$$

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, v\right\rangle = 0$$

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\|v\|^2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle v, v \rangle = \left\langle \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, v \right\rangle - \left\langle v, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \right\rangle = 0$$

הנגזרת של העקומה במרחב

$$\frac{\mathrm{d}r\left(\gamma\left(t\right)\right)}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u^i}\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t} = \sum_i r_{,i}\left(\gamma\left(t\right)\right)\dot{\gamma}^i$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sum_i r_{,i}\left(\gamma\left(t\right)\right)\ddot{\gamma}^i + \sum_i \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r_{,i}\left(\gamma\left(t\right)\right)\right)\dot{\gamma}^i =$$

$$= \sum_i r_{,i}\left(\gamma\left(t\right)\right)\ddot{\gamma}^i + \sum_i \left(\sum_j r_{,ij}\dot{\gamma}^j\right)\dot{\gamma}^i =$$

$$= \sum_i r_{,i}\ddot{\gamma}^i + \sum_i \left(\sum_j \dot{\gamma}^j \sum_k {\Gamma^k}_{ij} r_{,k}\right)\dot{\gamma}^i + \sum_i \sum_j \dot{\gamma}^j b_{ij}\hat{n}\dot{\gamma}^i =$$

$$= \sum_k r_{,k}\ddot{\gamma}^k + \sum_k \sum_i \sum_j r_{,k}{\Gamma^k}_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j + \begin{pmatrix} \text{something} \\ \text{perpendicular} \\ \text{to } \hat{n} \end{pmatrix}\hat{n}$$

בקו גאודזי נדרוש

$$0 = \sum_k r_{,k}\ddot{\gamma}^k + \sum\sum\sum r_{,k}{\Gamma^k}_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j$$

לכן דורשים

$$\forall_k \ddot{\gamma}^k + {\Gamma^k}_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j = 0$$

משפט

γ עקומה גאוזדית אס"ם היא מקיימת את המערכת

$$\ddot{\gamma}^k + {\Gamma^k}_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j = 0$$

ובכתיבה רגילה:

$$\forall_k \ddot{\gamma}^k + \sum_i \sum_j {\Gamma^k}_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j = 0$$

דוגמה - חרוט

$$r\left(\phi,z\right)=\begin{pmatrix}Rz\cos\phi\\ Rz\sin\phi\\ z\end{pmatrix}$$

R מתאר את צורת החרוט - את היחס בין המרחק בציר ה[z] למרחק על המישור [xy].

$$\mathrm{d}r=\begin{pmatrix}-Rz\sin\phi & R\cos\phi\\ Rz\cos\phi & R\sin\phi\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$g=\ \mathrm{d}r^{T}\mathrm{d}r=\begin{pmatrix}R^{2}z^{2} & 0\\ 0 & R^{2}+1\end{pmatrix}$$

$$g_{11}=R^{2}z^{2}\qquad g_{22}=R^{2}+1\qquad g_{12}=g_{21}=0$$

$$g^{11}=R^{-2}z^{-2}\qquad g^{22}=\left(R^{2}+1\right)^{-1}\qquad g^{12}=g^{21}=0$$

תזכורת: $\Gamma^{k}{}_{ij}=\frac{1}{2}g^{km}\left(g_{mi,j}+g_{jm,i}-g_{ij,m}\right)$

$$g_{11,1}=0\qquad g_{11,2}=2R^{2}z\qquad g_{22,1}=0\qquad g_{22,2}=0$$

$$\Gamma^{1}{}_{11}=\frac{1}{2}g^{11}\left(g_{11,1}+g_{11,1}-g_{11,1}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(g_{21,1}+g_{12,1}-g_{11,2}\right)=0$$

$$\Gamma^{1}{}_{12}=\Gamma^{1}{}_{21}=\frac{1}{2}g^{11}\left(g_{11,2}+\cancel{g_{21,1}}-\cancel{g_{12,1}}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(g_{21,1}+g_{22,1}-g_{12,2}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{R^{2}z^{2}}2R^{2}z=\frac{1}{z}$$

$$\Gamma^{2}{}_{11}=-\frac{R^{2}}{1+r^{2}}z$$

תזכורת: כדי שעקומה תהיה גיאודזית עליה לקיים $\ddot{\gamma}^{k}+\Gamma^{k}{}_{ij}\dot{\gamma}^{i}\dot{\gamma}^{j}$

במקרה שלנו, עבור $k=1$:

$$\ddot{\gamma}^{1}+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\Gamma^{1}{}_{ij}\dot{\gamma}^{i}\dot{\gamma}^{j}=0$$

$$\ddot{\phi}+2\frac{1}{z}\dot{\phi}\dot{z}=0$$

ועבור $k=2$:

$$\ddot{z}-\frac{R^{2}}{1+R^{2}}z\dot{\phi}^{2}=0$$

לצורך פשטות הגזירה נרצה פרמטריזציה טבעית - כלומר $\|\dot{\gamma}\| = 1$. הנורמה כאן צריכה להיות לפי המטריקה:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} & \dot{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^2 z^2 & 0 \\ 0 & R^2 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = 1$$

$$\dot{\phi}^2 R^2 z^2 + \dot{z}^2 \left(1 + R^2\right) = 1$$

לפי המקרה $k = 1$:

$$\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} = -2\frac{\dot{z}}{z}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln \dot{\phi}\right) = -2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln z\right)$$

$$\ln \dot{\phi} = -2 \ln z + \ln A$$

$$\dot{\phi} = \frac{A}{z^2}$$

לפי מקרים $k = 1$ ו$k = 2$:

$$1 = R^2 z^2 \left(\frac{A}{z^2}\right)^2 + \left(1 + R^2\right) \dot{z}^2$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dot{z} = \frac{\sqrt{z^2 - R^2 A^2}}{z\sqrt{1 + R^2}}$$

$$t = \sqrt{1 + R^2} \int \frac{z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2 - R^2 A^2}} = \sqrt{A + R^2}\sqrt{z^2 - R^2 A^2} + B$$

$$z = \sqrt{\frac{\left(t - B\right)^2}{1 + R^2} + R^2 A^2}$$

$$\dot{\phi} = \frac{A}{z^2} = \frac{1}{R^2 A} \frac{1}{1 + \left(\frac{t-B}{AR\sqrt{1+R^2}}\right)^2}$$

$$\phi = \sqrt{1 + \frac{1}{R^2}} \arctan\left(\frac{t - B}{AR\sqrt{1 + R^2}}\right) + C$$

וקיבלנו העקומות הגיאודזיות הן:

$$z = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \frac{1}{R^2}} \arctan\left(\frac{t-B}{AR\sqrt{1+R^2}}\right) + C \\ \sqrt{\frac{(t-B)^2}{1+R^2} + R^2 A} \end{pmatrix}$$

נשים לב שקיבלנו 3 דרגות חופש(הפרמטרים A, B, C), בעוד שאמורות להיות 4 דרגות חופש, לכל נקודה(2 דרגות חופש) וכיוון(עוד 2 דרגות חופש) אפשר להגדיר קו גיאודזי. הסיבה היא שדרשנו פרמטריזציה טבעית - ולכן הכיוון התכווץ לדרגת חופש אחת.

שדות וקטוריים

הגדרה

שדה וקטורי הוא פונקציה $V : M \to T_a M$ כך ש

$$V\left(a \in M\right) \in T_a M$$