## תזכורת

החבורה הדיהדרלית $I_2(n)$ היא החבורה הנוצרת ע"י 2 יוצרים $s,t$ המקיימים יחסים $s^n=e, t^2=e$, $tst=s^{-1}$.

רושמים: $I_2(n)=\left\langle s,t : s^n=e, t^2=e, tst=s^{-1}\right\rangle$

# משפט

$$|I_2(n)|=2n$$

## הוכחה

תרגיל.

## רעיון

ט.ע. לכל איבר ב$I_2(n)$ הוא מהצורה $ts^i$ או $s^i$, $0\leq i<n$.

מוכיחים זאת ע"י שמעבירים את ההופעה הימנית ביותר של $t$ במילה שמאלה ע"י שימוש ביחס $tst=s^{-1}\Leftrightarrow st=ts^{-1}$

## דוגמה

$$n=6$$

$$w=tst^3s^5ts^{-2}ts^2=$$

$$=tstt^3s^5tts^2s^2=$$

$$=tst^3s^9=$$

$$=tst^3s^3=$$

$$=tsts^3=$$

$$=tts^{-1}s^3=s^2$$

## ט.ע.2

לכל $0\leq i<j<n$ $s^i\neq s^j$, $ts^i\neq ts^j$ וכן $s^i\neq ts^j$, $ts^i\neq s^j$

### מסקנה

$$I_2(n) = \{s^i : 0 \le i < n\} \coprod \{ts^i : 0 \le i < n\}$$

## משפט

יהי $p$ ראשוני, $G$ חבורה מסדר $2p$. אזי $G \cong \mathbb{Z}_{2p}$ או $G \cong I_2(p)$

### הוכחה

נניח $p \neq 2$.

לפי משפט קושי יש ב$G$ איבר מסדר $p$, נסמנו $s$, ומתקיים $s^p = e$.

לפי משפט קושי יש ב$G$ איבר מסדר 2, נסמנו $t$, ומתקיים $t^2 = e$

הערה: $s \neq t$ (מדוע?)

נסמן $H = \langle s \rangle$ החבורה הנוצרת ע"י $s$. האינדקס שלה 2 (לפי לגראנז'). לכן $H$ תח"נ.

מסקנה: $tHt = tHt^{-1} = H$ (כי $t$ מסדר 2, וכי $H$ תח"נ).

לכן, מכיוון ש$s \in H$, $tst \in H$. כלומר, קיים $0 \le i < p$ כך ש$tst = s^i$ (*).

כעת, $t^2 = e$, $s^p = e$ ולכן

$$s = t^2st^2 = t(tst)t = ts^it = \overbrace{(tst)(tst)\dots(tst)}^{i\,times} = (tst)^i =$$

$$= \left(s^i\right)^i = s^{i^2}$$

קיבלנו $s^{i^2} = s \Leftrightarrow s^{i^2-1} = e$

$$\Rightarrow p | i^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow i^2 \equiv 1 \bmod p$$

כלומר, $i$ הוא פתרון של המשוואה $x^2 \equiv 1$ ב$\mathbb{Z}_p$ $\Leftarrow$ $i \equiv \pm 1 \bmod p$. נצרף זאת ל(*) ונקבל $tst = s$ או $tst = s^{-1}$

- אם $tst = s \Leftarrow st = ts$
  ולכן סדר האיבר $ts \in G$ הוא $k$ המינימלי המקיים $e = (ts)^k = t^k s^k$
  $\Leftarrow$ $k$ כ.מ.מ. של סדרי $s$ ו$t$ כלומר כ.מ.מ. של 2 ו$p$ ולכן $k = 2p$.
  כלומר, יש ב$G$ איבר מסדר $2p$ ולכן $G$ ציקלית.
- אם $tst = s^{-1}$ וגם $s^p = e$ ו$t^2 = e$
  אז $G$ נוצרת ע"י $s$ ו$t$ המקיימים יחסים הנ"ל, וכן

$$G = H \coprod tH = \{s^i : 0 \le i < p\} \coprod \{ts^i : 0 \le i < n\}$$

  כלומר, $G$ דיהדרלית.

נותר המקרה $p = 2$. $G$ מסדר 4, ולפי טבלאות כפל יש רק 2 חבורות כאלה והן $\mathbb{Z}_4$ ו$I_2(2)$.

## תרגיל

הוכח חב' $G$ מסדר 4 איזומורפית ל$\mathbb{Z}_4$ או ל$I_2\left(2\right)=\left\{ s,t:t^{2}=e,s^{2}=e,tst=s^{-1}\right\}$
בלא להשתמש בטבלאות כפל.

### הדרכה

דומה להוכחת המשפט, רק יותר פשוט.

# מכפלה ישרה של חבורות

## הגדרה

תהיינה $A,B$ חבורות כלשהן. המכפלה(החיצונית) הישרה של $A$ ו$B$ היא הקבוצה

$$A\times B:=\left\{ \left(a,b\right):a\in A,b\in B\right\}$$

מכפלה קרטזית של קבוצות עם כפל

$$\forall\left(a_{1},b_{1}\right),\left(a_{2},b_{2}\right)\in A\times B\quad\left(a_{1},b_{1}\right)\cdot\left(a_{2},b_{2}\right):=\left(a_{1}a_{2},b_{1}b_{2}\right)$$

## עובדה

$A\times B$ עם המכפלה הנ"ל היא חבורה הנקראת המכפלה החיצונית הישרה של $A$ ו$B$.
(לעיתים נשמיט את המילה "חיצונית").

הוכחה: תרגיל.

## למשל

$$e_{A\times B}=\left(e_{A},e_{B}\right)$$

$$\left(a,b\right)^{-1}=\left(a^{-1},b^{-1}\right)$$

ואידך פירושא זיל גמור(=וכל השאר(הפירוש) - למד לבד)

## עובדה 2

החבורות $A$ ו$B$ משוכנות בתוך $A\times B$(כלומר איז' לת"ח של $A\times B$)

$$A\cong\left\{ \left(a,e_{B}\right):a\in A\right\} =\bar{A}$$

$$B\cong\left\{ \left(e_{A},b\right):b\in B\right\} =\bar{B}$$

## עובדה 3

ת"ח $A \times B \geq \bar{A}, \bar{B}$ מקיימות:

1. $\bar{A} \trianglelefteq A \times B$, $\bar{B} \trianglelefteq A \times B$
2. $\bar{A} \cap \bar{B} = \{e_{A\times B}\}$
3. $\bar{A}\bar{B} = A \times B$ (מכפלת ת"ק בחבורה $KL = \{kl : k \in K, l \in L\}$)

### הוכחה

1. נתבונן בהיטל $\varphi : A \times B \to B$ המוגדר ע"י $\varphi((a,b)) = b$. $\varphi$ אפימורפיזם. $\ker\varphi = \bar{A}$, ולכן $\bar{A} \trianglelefteq A \times B$
   בדומה ההיטל $\psi : A \times B \to A$ המוגדר ע"י $\psi((a,b)) = a$ הוא אפימורפיזם ו-$\ker\psi = \bar{B}$ ולכן $\bar{B} \trianglelefteq A \times B$.
2. ברור מההגדרה.
3. לכל $(a,b) \in A \times B$, $(a,b) = (a, e_B)(e_A, b) \in \bar{A} \cdot \bar{B}$ ■

## הגדרה

תהא $G$ חב', $A, B \leq G$.
$G$ מכפלה פנימית ישרה של $A$ ו-$B$ אם:

1. $A \trianglelefteq G$, $B \trianglelefteq G$
2. $A \cap B = \{e_G\}$
3. $AB = G$

סימון: $G = A \otimes B$

כתיב מקוצר: $G$ מ"פ ישרה של $A$ ו-$B$.

### ראינו

$A, B$ חבורות, אזי $A \times B = \bar{A} \otimes \bar{B}$ כאשר $\bar{A}, \bar{B}$ הוגדרו לעיל.

## משפט

תהא $G$ חבורה, $A, B \leq G$.
אם $G = A \otimes B$ אזי $G \cong A \times B$.

## דוגמה

$G=\mathbb{Z}_6$

$A=\{0,3\}=\langle 3\rangle$, $B=\langle 2\rangle=\{0,2,4\}$

1. $A,B\leq\mathbb{Z}_6$
2. $A\cap B=\{0\}$
3. $A+B=\{0,2,4\}+\{0,3\}=\{0,2,4,3,5,1\}=\mathbb{Z}_6$

מכאן $\mathbb{Z}_6=A\otimes B$.
לפי המשפט שאנחנו צריכים להוכיח

$$\mathbb{Z}_6\cong A\times B\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3=((a,b):a\in\mathbb{Z}_2,b\in\mathbb{Z}_3)$$

ואכן $(1,1)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$ איבר מסדר 6.

## הוכחת המשפט

תהא $G$ חב' כנ"ל עם $A,B$ כנ"ל. נגדיר העתקה $f:A\times B\to G$ ע"י $f((a,b))=ab$.

צ"ל: $f$ חח"ע, על, הומ'.

1. $f$ חח"ע. נניח קיימים $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in A\times B$ כך ש$f((a_1,b_1))=f((a_2,b_2))$.

$$\Leftrightarrow a_1b_1=a_2b_2$$

$$\Leftrightarrow a_2^{-1}a_1=b_2b_1^{-1}$$

אז $a_2^{-1}a_1\in A\cap B$⇐$a_2^{-1}a_1=e$ לפי התנאים ⇐$a_1=a_2$
באופן דומה $b_1=b_2$(השלם)

2. $f$ על. לפי תנאי 3 של מ"פ $G=AB$, לכל לכל $g\in G$ קיימים $a\in A,b\in B$ כך ש$g=ab=f((a,b))$

3. נותר להוכיח $f$ הומ'.

ט.ע. אם $G=A\otimes B$ אז לכל $a\in A,b\in B$ מתקיים $ab=ba$
הוכחת ט.ע.: $ab=ba\Leftrightarrow aba^{-1}b^{-1}=e$
אבל $aba^{-1}b^{-1}=\left(aba^{-1}\right)b^{-1}$, ו$aba^{-1}\in B$ כי $B\trianglelefteq G$ לפי תנאי 1 של מ"פ. כמובן ש$b^{-1}\in B$, ולכן $aba^{-1}b^{-1}\in B$.
מאידך $aba^{-1}b^{-1}=a\left(ba^{-1}b^{-1}\right)\in A$ באותו אופן.
ולכן $aba^{-1}b^{-1}\in A\cap B$. לפי תנאי 2 של מ"פ $A\cap B=\{e\}$, ולכן $aba^{-1}b^{-1}=e$⇐$ab=ba$. מש"ל ט.ע.

כעת נחזור להוכחה ש$f$ הומ'. צ"ל: לכל $(a_1,b_1)(a_2,b_2)\in A\times B$ מתקיים $f((a_1,b_1)(a_2,b_2))=f((a_1,b_1))f((a_2,b_2))$. אכן:

$$f((a_1,b_1)(a_2,b_2))=f((a_1a_2,b_1b_2))=a_1a_2b_1b_2=a_1b_1a_2b_2=f((a_1,b_1))f((a_2,b_2))$$

■

## משפט

תהא $G$ חבורה אבלית סופית. $G$ איזומורפית למ"ח ישרה של ת"ח $p$-סילוא שלה.

כלומר: אם $|G| = \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i}$ פירוק למכפלה של חזקות של גורמים ראשוניים שונים.
תהיינה $1 \leq i \leq n \quad Hp_i$ ת"ח $p$-סילוא של $G$, אזי:

$$G \cong Hp_1 \times Hp_2 \times ... \times H_{p_m}$$

### הערה

אם $G$ אבלית, $p$ ראשוני המחלק את סדר $G$, אז יש ת"ח $p$-סילוא יחידה ב$G$(מדוע?)

## מסקנה

אם $G$ חבורה אבלית מסדר $p_1 p_2 \cdots p_m$ מכפלה של ראשוניים שונים, אז $G \cong \mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times ... \times \mathbb{Z}_{p_m}$

### הוכחה

לפי המשפט דלעיל

$$G \cong Hp_1 \times ... \times Hp_m$$

אבל לכל $1 \leq i \leq m$ $|Hp_i| = p_i$ חב' מסדר ראשוני $p_i$ ולכן $Hp_i \cong \mathbb{Z}_{p_i}$

## דוגמה

- $G$ חב' אבלית מסדר $G$. לפי המסקנה $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$
- $G$ חב' מסדר 105. $G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$

וכו' וכו'.