<u>חוגים תרגיל 8 פתרון</u>

1. ברור שאנחנו רוצים להראות ש± 1 $a = 7^{0.5}$ לא לא פריק, $norm(a) = 6$

$$6 = (7^{0.5} + 1) * (7^{0.5} - 1) = (2 + 7^{0.5})(-2 + 7^{0.5})(3 + 7^{0.5})(-3 + 7^{0.5}) = 2 * 3$$

2. נוכיח -2 לא פריק.נניח בשלילה שהוא כן ו$A * B = -2$ הנורמה של A מחלקת את הנורמה של -2 לכן A הוא ± 1 או ± 2 וסיימנו

נוכיח 3 אי פריק.הנורמה של 3 היא 9 שוב נניח בשלילה $A * B = 3$ שוב $A = a + 0 * -6^{0.5}$ כי אחרת נקבל סתירה לתכונת קושי.ושוב מה שמחלק את 9 זה רק 3 ו1 אז *a=3* וסיימנו שוב

נוכיח $(-6)^{0.5}$אי פריק.הנורמה 6.נניח בשלילה ש$A * B = (-6)^{0.5}$לכן B,A קטנים מ 6 לכן המקדם של $(-6)^{0.5}$ אפס אבל זאת סתירה וסיימנו שוב ושוב.

נוכיח שהגורמים לא חברים, וכן לצערינו הרב (כה רב) $\frac{(-6)^{0.5}}{2}, \frac{2}{3}$ לא נמצאים בחוג ולכן אין A הפיך כך ש $3 * A = 2{,}3 * A = (-6)^{0.5}$ ולכן הגורמים שלנו לא חברים.

$(-6)^{0.5}$$<-2>=-2a-2b$ אממה, $< 3 > * (-6)^{0.5} \notin < -2 >$ אבל

$(< 3 > * (-6)^{0.5})^2 = -54 \in < -2 >$ לכן -2 לא ראשוני.טרגדיה.

$(-6)^{0.5}$$<3>=3a+3b$ אממה, $< -2 > * (-6)^{0.5} \notin < 3 >$ אבל

$(< -2 > * (-6)^{0.5})^2 = -24 \in < 3 >$ לכן -2 לא ראשוני.עוד טרגדיה.

2,3 לא שייכים לאידיאל שנוצר עי $(-6)^{0.5}$ אבל 6 כן.לכן $(-6)^{0.5}$ לא ראשוני, הכתובת הייתה על הקיר...

. 3. $(x^2 - z^2)\mathrm{mod}(< xy + z^2 >) = x^2 - xy \quad x^2 - z^2 = (x + z)(x - z) \in F(x, y, z)$

לכן בחוג $\frac{F(x,y,z)}{<xy-z^2>}$ יש שני פירוקים לאותו דבר:$x(x - y), (x + z)(x - z)$ נרצה להראות שבחוג המנה אין גורם משותף בין x לבין $(x + z), (x - z)$.לפי איזו 1 $\frac{F(x,y,z)}{<xy-z^2>} \cong F[x, y, \sqrt{xy}]$ ולכן x הוא אי פריק כי הוא חזקה של 1.נראה ש$x \pm \sqrt{xy}$ $x|x$ לא מתקיים.אם זה כן מתקיים אז

$x \pm 1/\sqrt{xy}$ הוא המנה אבל הוא לא שייך לחוג. ולכן $x \pm \sqrt{xy}$ $x|x$ לא מתקיים.ולכן הפירוקים שונים ולכן החוג שלנו הוא לא UFD משל.

3. א. R תחום שלמות, לפי משפט האיזו ה3 $\frac{R}{Ra} = \frac{\frac{R}{Rab}}{\frac{Ra}{Rab}}$ ולכן $\left|\frac{Ra}{Rab}\right| * \left|\frac{R}{Ra}\right| = \frac{R}{Rab}$ נראה ש $\frac{Ra}{Rab} = \frac{R}{Ra}$

זה נכון כי האיזו' $f(ak + Rab) = k + Rb$ הוא חחע ועל כי $b|k \text{ iff } ab|ak$ לכן

$N(ab) = |\frac{R}{Rab}| = \left|\frac{R}{Ra}\right| * \left|\frac{Ra}{Rab}\right| = \left|\frac{R}{Ra}\right| * \left|\frac{R}{Rab}\right|$ ולכן $N(ab) = N(a)N(b)$ משל.

ב.$\frac{z}{10z}$ $N(5)N(2) \neq N(0) = 2$ ו$N(2) = 2$ $\frac{\frac{z}{10z}}{<5>} = 5$ ולכן $N(5)N(2) = 10 \neq 0$

4. $Z[i]/< 3 + i > \cong Z/10Z$, נגדיר הומומורפיזם $f(a + bi) = (a - 3b)\mathrm{mod}10$ ברור שזה הומומורפיזם. נראה חחע ועל.על קל, נבחר b=0 a=1,2,3,4,5,6,7,8,9,0 וקיבלנו את כל 10Z

חחע:נניח בשלילה 2 מקורות לאיבר אחד.$(a_2 - 3b_2 + 3b_1 - a_1)mod(10) = 0$

$3 + i|10, 3 + i|(a_2 - a_1) - 3(b_2 - b_1) \rightarrow 3 + i|(a_2 - a_1 + (b_2 - b_1)$ ולכן

$x_2 mod(3 + i) = x_1 mod(3 + i)$ ולכן סיימנו.נוכיח $3 + i$ אינו ראשוני כי אברי האידיאל שלו הם אפס אבל 2 ו5 אינם אפס ומכפלתם כן.נראה ש$Z[i]/7Z$ הוא תחום שלמות ולכן 7 ראשוני.יהין A,B $A * B = (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i = 0 -> d^2 + c^2 = 0$ אבל אין סכום ריבועים שמתאפסים לא טרוויאלים ב $Z/7Z$ ולכן קיבלנו תחום שלמות ו7 ראשוני.

5. נניח R UFD נגדיר את $\mu(a) = \#$ הראשוניים בפירוק.אם a|b אז כל ראשוני בa נמצא בb ולכן $\mu(a) \le \mu(b)$ אם $\mu(a) = \mu(b)$ וגם a|b יש להם אותם ראשוניים עד כדי חברות אז $a\sim$b. בפרט אם $\mu(a) = 0$ אז אין לו גורמים ראשוניים בפירוק וa|0 לכן a~0 משל.
6. $R \quad \in x^\wedge r$ נוכיח ש r שייך לZ $R_r.x^{r!/r} \epsilon R$ וגם$x^\wedge(1/r!) \in R$ ולכן מסגירות לכפל נקבל כי$x^{(1/r)} \in R_r \subseteq R$ לכל r ושוב מסגירות לכפל לכל a שייך לZ נקבל$x^a * x^{(1/r)} = x^{(a/r)} \in R$
כל איבר ב$\mathrm{R_r}$ הוא סכום של כנל ולכן אם יש איבר בR יש לו מכנה לשבר מצומצם מקסימלי ולכן הוא שייך ל$\mathrm{R_r}$ כלשהו ושם הוא סכום של כאלה וסיימנו.
ב. $R_1 \subseteq R$ $x \in F[x] =$ אבל $x = x^{(1/2)} * x^{(2)} = \cdots = x^{(n!)} * x^{(1/(n!))}$ לכל nולכן אין פירוק סופי למכפלות איברים אי פריקים וזהו.
ג.$\mathrm{R_n = F\left[x^{(1/(n!))}\right] = F[y] \cong F[x] = R_1 {-}{>}\ R_m \cong R_n \cong R_1}$ אבל החוגים הללו הם תחומי פריקות יחידה וRו לא ולכן הם לא אזומורפים