תורת החבורות 88-218-01 תשפ"א
הערות הרצאה 7

0.1 משפט ההתאמה

תזכורת 0.1. תהי A קבוצה עם יחס סדר חלש $\leq$. תרשים הָסֶה הוא תרשים לתיאור $(A, \leq)$.

דוגמה 0.2. נתבונן את קבוצת המחלקים של 120:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \,:\, n|120\}$$

ולכל $n \in A$ נגדיר את קבוצת חזקות הראשוניים שמחלקות אותו

$$D(n) = \left\{p^i \,:\, i > 0, \text{ראשוני } p, p^i|n\right\}$$

נגדיר קבוצה $\mathcal{D} = \{D(n) \,|\, n \in A\}$. עבור יחסים מתאימים נקבל את תרשימי הסה שמופיעים באיור 1.

נרצה למצוא את הקשר בין תת־החבורות של $\mathbb{Z}_{120}$ המכילות את $\langle 40 \rangle$, לבין תת־החבורות של $\mathbb{Z}_{120}/\langle 40 \rangle$.

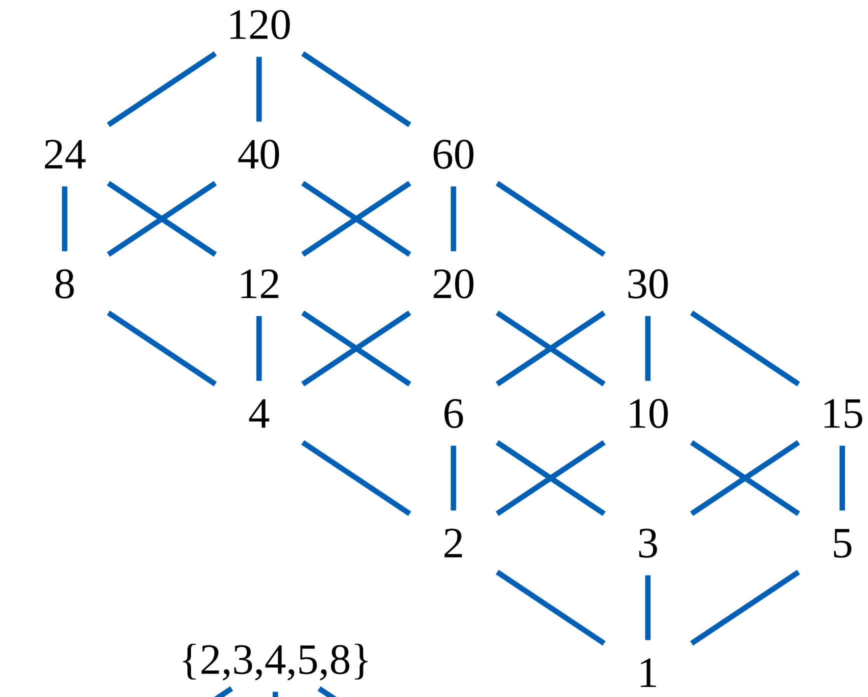
הערה 0.3. תהי G חבורה ותהי $N \lhd G$ תת־חבורה נורמלית. נרצה למצוא את תת־החבורות של G/N. נתבונן בהטלה הטבעית

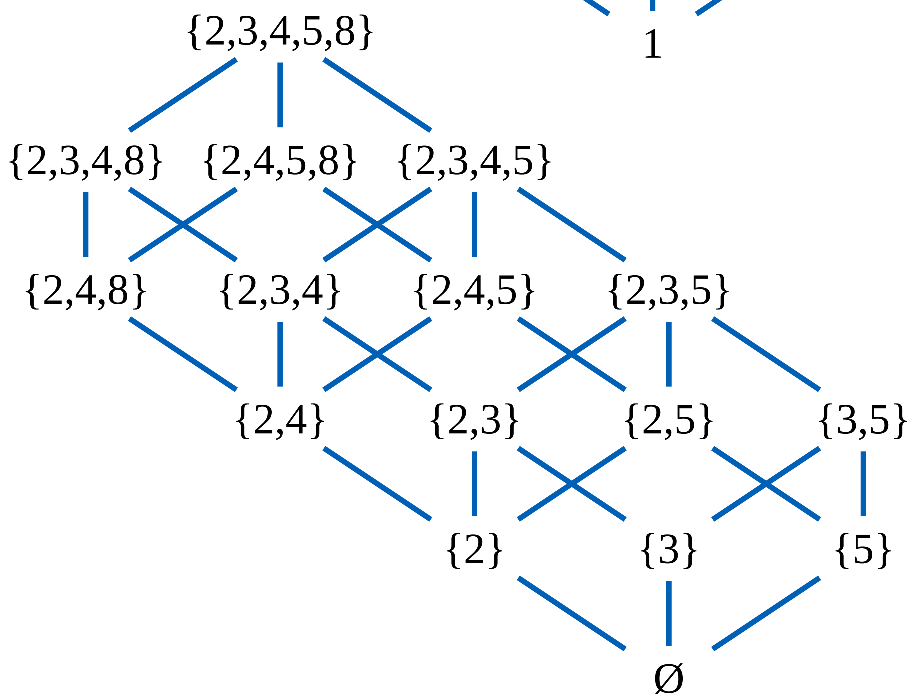
$$\begin{aligned} \pi \colon G &\to G/N \\ g &\mapsto gN \end{aligned}$$

ולכל $N \leq H \leq G$ נשים לב כי

$$\pi(H) = \{hN \,|\, h \in H\} = H/N \leq G/N$$

משפט 0.4 (משפט ההתאמה, או משפט האיזומורפיזם הרביעי)**.** תהי G חבורה ותהי $N \lhd G$ תת־חבורה נורמלית. אז יש התאמה חח"ע ועל בין תת־החבורות של חבורת המנה G/N לבין תת־החבורות של G המכילות את N. למעשה מדובר באיזומורפיזם של סריגים.





איור 1: תרשים הסה למחלקים של 120 (לפי יחס החלוקה) ושל תת־קבוצות של חזקות הראשוניים של מחלקי 120 (לפי יחס ההכלה), מאת דיויד אפשטיין, נחלת הכלל

הוכחה. נסמן $\mathcal{L}(G/N)$ את סריג תת־החבורות של G/N, ובסימון $\mathcal{L}(G,N)$ את סריג תת־החבורות של G המכילות את N (זהו תת־סריג של $\mathcal{L}(G)$). נגדיר שתי העתקות

$$\begin{aligned}\Phi\colon \mathcal{L}(G/N) &\to \mathcal{L}(G,N)\\ L &\mapsto \pi^{-1}(L)\end{aligned}$$

ואת ההעתקה

$$\begin{aligned}\Psi\colon \mathcal{L}(G,N) &\to \mathcal{L}(G/N)\\ H &\mapsto \pi(H) = H/N\end{aligned}$$

אם אכן מדובר בהעתקות המוגדרות היטב שהן הפיכות, אז כל תת־חבורה של G/N היא מן הצורה H/N עבור $H \leq G$ (המכילה את N).

נרצה להוכיח כי Φ ו-Ψ הן הופכיות זו לזו, משני הצדדים.

מצד אחד, תהי $L \leq G/N$. נרצה להוכיח

$$L = \Psi(\Phi(L)) = \Psi(\pi^{-1}(L)) = \pi(\pi^{-1}(L))$$

ברור כי $\pi(\pi^{-1}(L)) \subseteq L$. ההטלה הטבעית π היא על, ולכן לכל $l \in L$ קיים $g \in \pi^{-1}(L)$ כך ש-$\pi(g) = l$. לכן

$$l = \pi(g) \in \pi(\pi^{-1}(L))$$

ונסיק את השיוויון $L = \pi(\pi^{-1}(L))$.

מצד שני, תהי $H \leq G$ המכילה את N. נרצה להוכיח כי

$$H = \Phi(\Psi(H)) = \Phi(\pi(H)) = \pi^{-1}(\pi(H))$$

כאן ברור כי $H \subseteq \pi^{-1}(\pi(H))$. כדי להוכיח שיוויון, יהי $g \in \pi^{-1}(\pi(H))$. לכן $\pi(g) \in \pi(H)$. כלומר קיים $h \in H$ כך ש-$\pi(g) = \pi(h)$. לכן $gN = hN$ לפי הגדרת π. לכן $g \in hN$, כלומר קיים $n \in N$ כך ש-$g = hn$. לפי ההנחה $N \subseteq H$, ולכן $g = hn \in H$. נסיק כי $H = \pi^{-1}(\pi(H))$. $\square$

טענה 0.5 (תכונות של ההתאמה). תהינה $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(G/N)$. לכן קיימות $H_1, H_2 \in \mathcal{L}(G,N)$ כך ש-$L_1 = H_1/N$ ו-$L_2 = H_2/N$.

1. מתקיים $H_1 \leq H_2$ אם ורק אם $L_1 \leq L_2$.
2. מתקיים $H_1 \lhd G$ אם ורק אם $L_1 \lhd G/N$.
3. אם $H_1 \lhd H_2$, אז $[H_2 : H_1] = [L_2 : L_1]$.
4. מתקיים ש-$(H_1 \cap H_2)/N = (H_1/N) \cap (H_2/N)$.

5. בקיצור, ההתאמה ממשפט ההתאמה שומרת על הכלה, חיתוך, מכפלות, נורמליות, אינדקסים וכו' (צריך להוכיח).

$$\begin{aligned} H &= H_1H_2 \\ H/N &= (H_1H_2)/N = (H_1/N)(H_2/N) \\ hN &= h_1h_2N = h_1Nh_2N \end{aligned}$$

תרגיל 0.6. התבוננו בחבורה

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\} \leq GL_2(\mathbb{Z}_3)$$

ומצאו כמה תת־חבורות של G מכילות את

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$$

פתרון. צריך לבדוק כי $N \lhd G$ (קל לבדוק סגירות להצמדות). לפי משפט ההתאמה יש התאמה חח"ע ועל בין תת־החבורות של G המכילות את N לבין תת־החבורות של G/N. בעזרת משפט האיזומורפיזם הראשון

$$\begin{gathered} G/N \cong U_3 \times U_3 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} N \mapsto (a, c) \end{gathered}$$

(לבדוק פרטים בבית) ולכן התשובה המבוקשת היא מספר תת־החבורות של $U_3 \times U_3$. נזכר כי $|U_3| = \varphi(3) = 2$. לכן U_3 היא ציקלית ובהכרח $U_3 \times U_3 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. כבר ראינו כי לחבורה $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ יש בדיוק 5 תת־חבורות:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \arrow[dl, dash, "2"'] \arrow[d, dash, "2"] \arrow[dr, dash, "2"] & \\ \langle (1,0) \rangle \arrow[dr, dash, "2"'] & \langle (1,1) \rangle \arrow[d, dash, "2"] & \langle (0,1) \rangle \arrow[dl, dash, "2"] \\ & \{(0,0)\} & \end{tikzcd}$$

0.2 עוד על החבורה הסימטרית

ברוב הפרק נניח $n \geq 3$ טבעי. במקום לדבר על S_X כללית נדבר על S_n. מתקיים $|S_n| = n!$.

הגדרה 0.7. מחזור $\sigma \in S_n$ הוא סוג מיוחד של תמורה. זו תמורה המייצגת מעגל אחד של החלפות

$$a_1 \mapsto a_2 \mapsto a_3 \mapsto \cdots \mapsto a_k \mapsto a_1$$

ושאר המספרים שאינם בקבוצה $\{a_1, \ldots, a_k\}$ נשארים במקום. לרוב מסמנים $\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$. האורך של המחזור σ הוא k.

דוגמה 0.8. התמורה הבאה היא מחזור

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (254) = (542) = (425)$$

הגדרה 0.9. לקבוצה $\{a_1, \ldots, a_k\}$ קוראים התומך של המחזור, ומסמנים $\mathrm{supp}(\sigma)$. נאמר כי שני מחזורים הם זרים, אם התומכים שלהם זרים. כלומר הם לא מזיזים את אותם מספרים.

הערה 0.10. הסדר של מחזור מאורך k הוא k. מחזורים זרים מתחלפים, ולכן חישובים עם מחזורים זרים הרבה יותר נוחים. לרוב במקום לכתוב

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

עבור תמורה כלשהי, נציג אותה כמכפלה של מחזורים זרים. שימו לב שהמספר i נמצא בשורה השנייה במיקום $\sigma^{-1}(i)$.

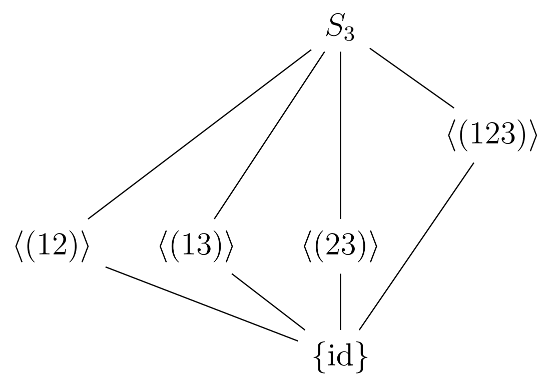
טענה 0.11. כל תמורה ניתנת להצגה כמכפלה של מחזורים זרים.

הוכחה. לבית באינדוקציה. כדאי לתכנת פונקציה שמקבלת את השורה השנייה $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ ומחזירה את σ כמכפלת מחזורים זרים. $\square$

דוגמה 0.12. בחבורה S_9 מתקיים

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 7 & 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = (186)(254)(37)$$

דוגמה 0.13. הנה סריג תת־החבורות של S_3:



במקרה כל תת־החבורות הנאותות של S_3 הן ציקליות, למרות שהיא לא ציקלית. זה לא נכון עבור $n > 3$.

הגדרה 0.14. מחזור מאורך 2 ב-S_n נקרא חילוף.

הערה 0.15. כל תמורה ב-S_n אפשר להציג כמכפלה של חילופים. כל מחזור אפשר להציג כמכפלת $k-1$ חילופים:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (a_1, a_2)(a_2, a_3) \ldots (a_{k-1}, a_k)$$

מפני שכל תמורה היא מכפלת מחזורים, וכל מחזור הוא מכפלת חילופים, אזי

$$S_n = \langle \{(ij) \,|\, 1 \leq i, j \leq n\} \rangle$$

אפשר להסתפק רק בחילופים מהצורה $(i, i+1)$, או חילופים מהצורה $(1i)$.

הגדרה 0.16. חלוקה של מספר טבעי n היא סדרה לא עולה של מספרים טבעיים $n_1 \geq \cdots \geq n_k > 0$ כך ש-$n = n_1 + \cdots + n_k$. נסמן ב-$p(n)$ את מספר החלוקות של n.

דוגמה 0.17. עבור $n = 4$ נקבל $p(4) = 5$ כי

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

תרגיל 0.18. תהי תמורה $\sigma \in S_n$ ויהי מחזור $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in S_n$. הוכיחו כי

$$\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \ldots, \sigma(a_k))$$

פתרון. חלק מתרגיל הבית.

מסקנה 0.19. מסקנה $S_n = \langle (12), (12 \ldots n) \rangle$.

הגדרה 0.20. תהי $\sigma \in S_n$ תמורה. נפרק אותה למכפלה של מחזורים זרים $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_k$ כאשר σ_i הוא מחזור מאורך r_i. אפשר להניח כי $r_k \geq \cdots \geq r_2 \geq r_1$. נגדיר את מבנה המחזורים של σ להיות ה-k-יה הסדורה $(r_1, \ldots, r_k)$.

הערה 0.21. מבנה מחזורים מוגדר היטב, והוא יחיד.

דוגמה 0.22. מבנה המחזורים של התמורה $(123)(56)$ הוא $(3,2)$; מבנה המחזורים של התמורה $(423)(15)$ גם הוא $(3,2)$; ומבנה המחזורים של $(1234)(56)(78)$ הוא $(4,2,2)$.

מסקנה 0.23. שתי תמורות ב-S_n הן צמודות (כלומר באותה מחלקת צמידות) אם ורק אם יש להן את אותו מבנה מחזורים.

דוגמה 0.24. התמורה $(123)(56)$ צמודה לתמורה $(423)(15)$ ב-S_8. הן לא צמודות לתמורה $(1234)(56)(78)$. כלומר מצאנו את המסלולים תחת פעולת ההצמדה.

$$\mathrm{conj}(x) = \left\{ gxg^{-1} \,\middle|\, g \in G \right\}$$

הוכחת המסקנה. בכיוון אחד, תהינה $\sigma, \tau \in S_n$ תמורות צמודות. נכתוב $\tau = \pi\sigma\pi^{-1}$ עבור $\pi \in S_n$ מסויימת. נניח כי $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_k$ זה הפירוק למכפלת מחזורים זרים. אז

$$\tau = \pi\sigma\pi^{-1} = \pi\sigma_1 \dots \sigma_k\pi^{-1} = \pi\sigma_1\pi^{-1}\pi\sigma_2\pi^{-1}\pi \dots \pi^{-1}\pi\sigma_k\pi^{-1}$$

וכל מכפלה $\pi\sigma_i\pi^{-1}$ היא מחזור מאותו אורך של σ_i. בנוסף המחזורים $\pi\sigma_1\pi^{-1}, \dots, \pi\sigma_k\pi^{-1}$ הם זרים כי σ היא חח"ע ועל. קיבלנו כי ל-τ יש פירוק למכפלת מחזורים זרים והאורכים שלהם מתאימים לאורכים של המחזורים בפירוק של σ. לכן יש להן את אותו מבנה מחזורים.

בכיוון השני, תהינה $\sigma, \tau \in S_n$ עם אותו מבנה מחזורים. נניח

$$\sigma = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_k, \qquad \tau = \tau_1\tau_2 \dots \tau_k$$

מחזורים זרים, כאשר לכל $1 \le i \le k$

$$\sigma_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,m_i}) \qquad \tau_i = (b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,m_i})$$

נגדיר תמורה $\pi \in S_n$ לפי $\pi(a_{i,j}) = b_{i,j}$, וכל שאר המספרים נשלחים לעצמם על ידי π. אז

$$\begin{aligned}\pi\sigma_i\pi^{-1} &= \pi(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,m_i})\pi^{-1} \\ &= (\pi(a_{i,1}), \pi(a_{i,2}), \dots, \pi(a_{i,m_i})) \\ &= (b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,m_i}) = \tau_i\end{aligned}$$

ולכן $\tau = \pi\sigma\pi^{-1}$. לכן σ ו-τ צמודות ב-S_n. $\square$

מסקנה 0.25. הוכיחו כי $Z(S_n) = \{\mathrm{id}\}$ עבור $n \ge 3$.

מסקנה 0.26. מספר מחלקות הצמידות ב-S_n הוא $p(n)$.

0.3 סימן וחבורת החילופין

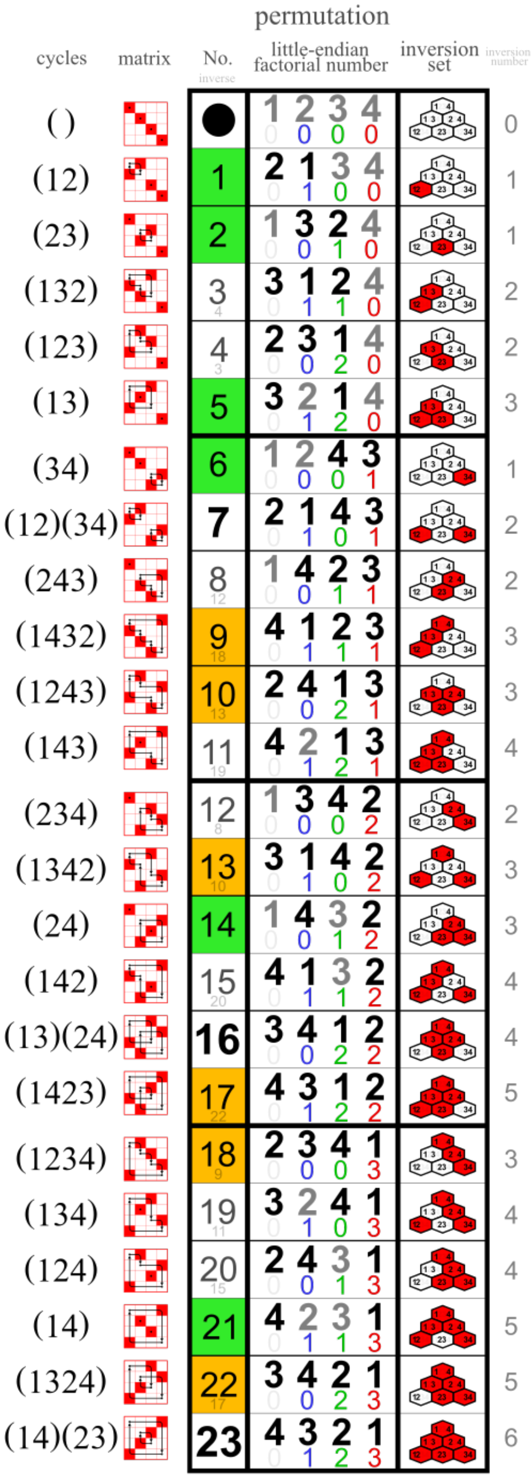
הגדרה 0.27. תהי $\sigma \in S_n$ תמורה. נסמן את קבוצת ההיפוכים ("הפרות הסדר") של σ ואת מספר ההיפוכים להיות

$$\begin{aligned}&\mathrm{Inv}(\sigma) := \{(i,j) \,|\, i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\} \\ &\mathrm{inv}(\sigma) := |\mathrm{Inv}(\sigma)|\end{aligned}$$

דוגמה 0.28. נבחר את $\sigma = (134) \in S_4$. אז

$$\begin{aligned}&\mathrm{Inv}(\sigma) = \{(1,2), (1,4), (2,4), (3,4)\} \\ &\mathrm{inv}(\sigma) = 4\end{aligned}$$

הזוגות $(1,3)$ ו-$(2,3)$ אינם היפוכים עבור σ. באופן כללי בחבורה S_4:



איור 2: איברי S_4 עם פירוט מאת טילמן פיסק, CC BY 3.0

הערה 0.29. קל לראות כי יש לכל היותר $\binom{n}{2}$ היפוכים, ושלתמורות הזהות $\mathrm{Inv}(\mathrm{id}) = \varnothing$ ו-$\mathrm{inv}(\mathrm{id}) = 0$.

טענה 0.30. ההעתקה

$$\begin{aligned} \mathrm{sign}\colon S_n &\to \Omega_2 = \{\pm 1\} \\ \sigma &\mapsto (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} \end{aligned}$$

היא הומומורפיזם.

הוכחה. החבורה S_n פועלת על הקבוצה

$$\binom{[n]}{2} = \{\{i,j\} \,:\, 1 \le i < j \le n\}$$

לפי $\sigma * \{i,j\} = \{\sigma(i), \sigma(j)\}$.
(אפשר להגדיר את הסימון

$$\binom{A}{k} \coloneqq \{S \subseteq A \,:\, |S| = k\}$$

ואז $\left|\binom{A}{k}\right| = \binom{|A|}{k}$). נשים לב כי

$$\mathrm{sign}(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

נקבל גורם -1 עבור היפוך וגורם 1 אחרת (אולי אחרי שינוי סדר במונה ובמכנה לפי σ).
יהיו $\sigma, \tau \in S_n$. אנחנו רוצים להוכיח $\mathrm{sign}(\sigma\tau) = \mathrm{sign}(\sigma)\,\mathrm{sign}(\tau)$. הפעולה ב-$S_n$ היא הרכבה ולכן

$$\begin{aligned} \mathrm{sign}(\sigma\tau) &= \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{(\sigma \circ \tau)(j) - (\sigma \circ \tau)(i)}{j - i} \\ &= \prod_{1 \le i < j \le n} \left(\frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{j - i} \cdot \frac{\tau(j) - \tau(i)}{\tau(j) - \tau(i)} \right) \\ &= \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{j - i} \cdot \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{\tau(j) - \tau(i)} \\ &= \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)} \cdot \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} \\ &= \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \mathrm{sign}(\tau) \end{aligned}$$

כאשר זוכרים כי τ תדאג שנעבור על כל $\binom{n}{2}$ איברי הקבוצה $\binom{[n]}{2}$. $\square$

דוגמה 0.31. נחשב את הסימן של $\mu = (12) \in S_n$. לפי ההגדרה הארוכה

$$\operatorname{sign}(\mu) = \left(\frac{1-2}{2-1} \cdot \frac{3-2}{3-1} \cdots \frac{n-2}{n-1}\right)\left(\frac{3-1}{3-2} \cdot \frac{4-1}{4-2} \cdots \frac{n-1}{n-2}\right) \cdot \left(\frac{4-3}{4-3}\frac{5-3}{5-3} \cdots \frac{n-(n-1)}{n-(n-1)}\right) = \frac{1-2}{2-1} = -1$$

בפרט לכל $n \geq 2$ נקבל שהומומורפיזם הסימן הוא על. דרך קצת יותר כללית עבור החילוף (ab): נניח $a < b$. לכל זוג $i < j$ אם $\{i,j\} \cap \{a,b\} = \varnothing$, אז (a,b) לא מזיז את i ואת j. אחרת, נניח כי $\{i,j\} \cap \{a,b\} \neq \varnothing$. זוגות ההיפוכים במקרה הזה הם:

- זוגות מהצורה $a < j$ עבור $j < b$, ויש $b-a-1$ זוגות כאלו.
- זוגות מהצורה $j < b$ עבור $a < j$, ויש $b-a-1$ זוגות כאלו.
- הזוג $a < b$, ויש אחד כזה.

לכן בסך הכל

$$\begin{aligned} \operatorname{inv}((ab)) &= 2(b-a-1)+1 \\ \operatorname{sign}((ab)) &= (-1)^{2(b-a-1)+1} = -1 \end{aligned}$$

נסו להראות כי $\operatorname{sign}((12\ldots n)) = (-1)^{n-1}$.

הערה 0.32. יהי $n \geq 3$. נסמן את קבוצת ההומומורפיזמים מ-S_n ל-Ω_2 בסימון $\operatorname{Hom}(S_n, \Omega_2)$. מסתבר כי

$$\operatorname{Hom}(S_n, \Omega_2) = \{\operatorname{triv}, \operatorname{sign}\}$$

טענה 0.33. תהי תמורה $\sigma \in S_n$. אם יש לה שתי הצגות כמכפלה של חילופים

$$\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k = \mu_1\mu_2\ldots\mu_r$$

כאשר σ_i ו-μ_j הם חילופים, אז $k \equiv r \pmod 2$. כלומר זוגיות מספר החילופים היא קבועה.

הוכחה חלקית. העזרו בכך שמתקיים

$$\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^k = (-1)^r$$

וסיימו את ההוכחה. $\square$

הגדרה 0.34. תמורה שסימנה 1 נקראת זוגית, ותמורה שסימנה -1 נקראת אי זוגית.

דוגמה 0.35. זה קצת מבלבל:

- החילוף (35) הוא תמורה אי זוגית. התמורה $(49)(35)$ היא זוגית.
- מחזור מאורך אי זוגי הוא תמורה זוגית, למשל (34158).
- תמורת הזהות היא תמורה זוגית.

הגדרה 0.36. חבורת החילופין (או חבורת התמורות הזוגיות) A_n היא תת־החבורה הבאה של S_n:

$$A_n = \{\sigma \in S_n \,|\, \mathrm{sign}(\sigma) = 1\} = \ker(\mathrm{sign})$$

ולכן $A_n \lhd S_n$. אפשר לבדוק שהיא גם סגורה להצמדה: לכל $\sigma \in S_n$ ולכל $\tau \in A_n$ מתקיים

$$\mathrm{sign}(\sigma\tau\sigma^{-1}) = \mathrm{sign}(\sigma)\,\mathrm{sign}(\tau)\,\mathrm{sign}(\sigma)^{-1} = \frac{\mathrm{sign}(\sigma)}{\mathrm{sign}(\sigma)}\,\mathrm{sign}(\tau) = 1 \cdot 1 = 1$$

טענה 0.37. חישוב האינדקס $[S_n : A_n]$ זו דרך נוספת להוכיח כי $A_n \lhd S_n$. הוכיחו שאם $H \leq S_n$ שאינה מוכלת ב-A_n, אז $A_nH = S_n$ וגם $[H : A_n \cap H] = 2$.

$$S_n/\ker(\mathrm{sign}) \cong \mathrm{im}(\mathrm{sign})$$

תרגיל 0.38. ההפך של משפט לגראנז' אינו נכון. מצאו חבורה מסדר n, ומספר $m|n$ כך שלחבורה אין תת־חבורה מסדר m.

הוכחה. נתחיל עם טענה כללית לגבי תת־חבורות נורמליות מאינדקס סופי. נניח כי $N \lhd G$ מאינדקס $t = [G : N]$ סופי. אז לכל $g \in G$ מתקיים $g^t \in N$. ההוכחה היא עם חבורת המנה G/N:

$$g^tN = (gN)^t = (gN)^{|G/N|} = e_{G/N} = N$$

ולכן $g^t \in N$.

נבחר את $G = A_4$. אפשר לחשב כי

$$|A_4| = \frac{|S_4|}{[S_4 : A_4]} = \frac{4!}{2} = 12$$

ונבחר $m = 6|12$. נניח בשלילה שקיימת תת־חבורה $H \leq A_4$ מסדר 6. אז $H \lhd A_4$ כי היא מאינדקס $t = 2$.

כל מחזור $(ijk) \in S_4$ הוא תמורה זוגית, ולכן שייך ל-A_4. נניח σ הוא מחזור מאורך 3, אז

$$\sigma = \sigma^3\sigma = \sigma^4 = (\sigma^2)^{[A_4:H]} \in H$$

$$(ijk)^2 = (ikj)$$

כלומר H כוללת את כל המחזורים מאורך 3. אבל ב-S_4 יש $\binom{4}{3}(3-1)! = 8$ מחזורים מאורך 3, וזו סתירה לסדר של H. □