תרגיל בית 10 בשדות ותורת גלואה
88-311 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1 (חימום). יהי $m|n$. הוכיחו $x^m-1|x^n-1$.

שאלה 2. יהי $n>1$ אי זוגי. הוכיחו שהפולינום הציקלוטומי מקיים $\Phi_{2n}(x)=\Phi_n(-x)$.

שאלה 3. כתבו נוסחה קצרה לפולינום הציקלוטומי $\Phi_{2^n}(x)$.

שאלה 4. מצאו את כל הפולינומים הציקלוטומיים $\Phi_n(x)$ כך ש-$\deg\Phi_n(x)=4$.

שאלה 5. הוכיחו כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\sum_{(k,n)=1}\rho_n^k\in\mathbb{Z}$. (רמז: מה המקדם של x^{n-1} בפולינום הציקלוטומי המתאים?)

שאלה 6. הוכיחו כי

$$\rho_{10}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}+i\cdot\sqrt{\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}}.$$

הדרכה מומלצת:

א. מצאו תת-שדה $\mathbb{Q}\subseteq F_1\subseteq\mathbb{Q}(\rho_{10})$ כך ש-$[F_1:\mathbb{Q}]=2$.

ב. בחרו $a\in F_1$ כך ש-$F_1=\mathbb{Q}(a)$. מצאו את הפולינום המינימלי של a מעל $\mathbb{Q}$, והיעזרו בנוסחת השורשים למשוואה ריבועית על מנת להביע את a באמצעות שורשים של מספרים רציונאליים.

ג. מצאו את הפולינום המינימלי של ρ_{10} מעל F_1, והיעזרו שוב בנוסחת השורשים על מנת לקבל את הדרוש.

כדי לפשט סכומים של שורשי יחידה, כדאי להיעזר ברעיון של שאלה 5.

שאלה 7 (קצת קשה). יהי $n>1$ טבעי, ונתבונן בפולינום הציקלוטומי $\Phi_n(x)$.

א. יהי $a\in\mathbb{Z}$ ויהי p ראשוני המחלק את $\Phi_n(a)$. הוכיחו כי $p|n$ או $p\equiv 1\,(\mathrm{mod} n)$.
רמז: הפולינום x^n-1 הוא ספרבילי מודולו p אם $p\nmid n$. מה הוא הסדר של $a\in U_p$?

ב. הסיקו מהסעיף הקודם שישנם אינסוף מספרים ראשוניים כך ש-$p\equiv 1\,(\mathrm{mod} n)$.

שאלה 8 (רשות). יהי n טבעי. בשאלה זו נראה הכללה לשאלות 2 ו-3 שתאפשר לחשב את הפולינום הציקלוטומי $\Phi_n(x)$ קצת יותר מהר.

א. יהי p ראשוני. הוכיחו שאם p זר ל-n, אז $\Phi_{pn}(x)\Phi_n(x)=\Phi_n(x^p)$. אחרת, אם $p|n$, הוכיחו כי $\Phi_{pn}(x)=\Phi_n(x^p)$.

ב. יהי r הרדיקל של n (כלומר מכפלת הראשוניים שמחלקים את n). הוכיחו שהפולינום הציקלוטומי מקיים $\Phi_n(x)=\Phi_r(x^{n/r})$.

שאלה 9 (רשות). כתבו תוכנה שבהינתן n טבעי מחשבת את הפולינום הציקלוטומי Φ_n. הדפיסו את $\Phi_1,\dots,\Phi_{100}$ ושערו השערה לגבי מקדמים של פולינומים ציקלוטומיים. חשבו את Φ_n עבור $n>100$ ובדקו את השערתכם.