

ב"א אלגברה לינארית תשפב מבחן לדוגמה

1. נתונות הנקודות $A = (-a, 0)$ ו $B = (a, 0)$ עבור $a > 0$. המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה A גדול פי 2 ממרחקן מהנקודה B זהה למקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים z המקיימים $|z + b| = 4$. נתון ש a, b פרמטרים ממשיים.

(א) מצאו את הערך של a ואת הערך של b .

פתרון: המקום הגאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה A גדול פי 2 ממרחקן מהנקודה B הוא כל ה (x, y) המקיימים

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

ואם נעלה בריבוע (שני הצדדיים חיוביים אז העלאה בריבוע היא פעולה שקולה) ונעביר אגף נקבל

$$0 = 4[(x-a)^2 + y^2] - [(x+a)^2 + y^2]$$

נפשט את צד ימין

$$\begin{aligned} 4[(x-a)^2 + y^2] - [(x+a)^2 + y^2] &= 4[x^2 - 2ax + a^2 + y^2] - [x^2 + 2ax + a^2 + y^2] \\ &= 3x^2 - 10ax + 3a^2 + 3y^2 \end{aligned}$$

כלומר קיבלנו שהמקום הגאומטרי הוא כל ה (x, y) המקיימים

$$3x^2 - 10ax + 3a^2 + 3y^2 = 0$$

או בחילוק ב 3 נקבל

$$x^2 - \frac{10}{3}ax + a^2 + y^2 = 0$$

ונתון שמקום זה שווה לכל ה z המקיימים $|z + b| = 4$ כלומר שזהו מעגל שמרכזו ב $(-b, 0)$ ורדיוסו 4 לכן נעביר את המקום הגיאומטרי שמצאנו לצורה של משוואת מעגל. כיוון ש

$$x^2 - \frac{10}{3}ax + a^2 + y^2 = \left(x - \frac{5}{3}a\right)^2 + \left(a^2 - \frac{25}{9}a^2\right) + y^2$$

נקבל שהמשוואה $x^2 - \frac{10}{3}ax + a^2 + y^2 = 0$ שקולה ל

$$\left(x - \frac{5}{3}a\right)^2 + y^2 = -\left(a^2 - \frac{25}{9}a^2\right) = \frac{16}{9}a^2 = \left(\frac{4}{3}a\right)^2$$

קיבלנו בסה"כ ש $\left(x - \frac{5}{3}a\right)^2 + y^2 = \left(\frac{4}{3}a\right)^2$ שווה למעגל שמרכזו ב $(-b, 0)$ ורדיוסו 4. לכן $-b = \frac{5}{3}a$ ו $\frac{4}{3}a = 4$ (זה בגלל שנתון $a > 0$). לכן $a = 3$ ו $b = -5$.

(ב) מלבן TNEF שצלעותיו מקבילות לצירים, חסום במקום הגאומטרי המתואר בפתיח.

שיעור ה y של הקודקודים E ו F קטנים מ 0.

המספר המרוכב $z = 2 + iy$ מייצג את הקודקוד T של המלבן.

הנקודה C נמצאת על ציר x כך ש $\vec{CN} \cdot \vec{CF} = -16$.

מצאו את השיעורים של הנקודה C .

פתרון: גילנו שהמקום הגאומטרי הוא כל ה z שמקיימים $|z - 5| = 4$ כלומר כל ה (x, y) שמרחקם מ $(5, 0)$ הוא 4. ראשית נמצא את y (שנתון ש $T = (2, y)$) - הוא מקיים

$$(2 - 5)^2 + y^2 = 16$$

או

$$y^2 = 7$$

ולכן $y = \pm\sqrt{7}$ אבל כיוון ש F עם אותו שיעור x כמו T אבל עם סימנים שונים בערך y , ומכיוון שערך ה y של T קטן מ 0 נקבל ש $T = (2, \sqrt{7})$ ו $F = (2, -\sqrt{7})$. כיון ש N עם אותו ערך y של T נקבל ש $N = (c, \sqrt{7})$ עבור איזה שהוא c שמקיים גם הוא את משוואת המעגל ולכן

$$(c - 5)^2 + (\sqrt{7})^2 = 16$$

או

$$(c - 5)^2 = 9$$

ולכן $c - 5 = \pm 3$ ולכן $c = 5 \pm 3$. מכיוון שהנקודה F עם שיעור x שווה ל 2 נקבל ש $c = 8$. ובסה"כ קיבלנו ש $N = (8, \sqrt{7})$ ו $F = (2, -\sqrt{7})$. כעת נסמן את C כ $(x, 0)$ עבור x כלשהוא. נתון ש $\vec{CN} \cdot \vec{CF} = -16$ ולכן

$$(x - 8) \cdot (x - 2) + \sqrt{7} \cdot (-\sqrt{7}) = -16$$

מכאן ש

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

כלומר $(x - 5)^2 = 0$ ולכן $x = 5$ מכאן ש C היא הנקודה $(5, 0)$.

2. יהיו $a, t \in \mathbb{R}$ פרמטרים ונביט במערכת המשוואות:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = t \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

(א) מצאו לכל אפשרות של ערכי הפרמטרים a, t , האם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או שאין פתרון. **פתרון:** נעביר את מערכת המשוואות לייצוג במטריצה ונדרג אותה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & t \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & t \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 - aR_1 \\ R_3 - R_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & t \\ 0 & 1 - a^2 & 1 - a & 1 - at \\ 0 & 1 - a & a - 1 & 1 - t \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & t \\ 0 & 1-a & a-1 & 1-t \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-at \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - (a+1)R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & t \\ 0 & 1-a & a-1 & 1-t \\ 0 & 0 & (1-a) - (a-1)(a+1) & 1-at - (a+1)(1-t) \end{array} \right)$$

וכעת:
אם $1-a \neq 0$ וגם

$$(1-a) - (a-1)(a+1) = (1-a)[1+(a+1)] = (1-a)[a+2] \neq 0$$

נקבל שיש לנו צורה מדורגת, ללא שורת סתירה וללא משתנים חופשיים ולכן במקרה זה יהיה פתרון יחיד. נטפל במקרה $a=1$ או $a \neq 1$ או $(a+2)=0$ (שמוסיף את האפשרות $a=-2$):

• $a=1$ - נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \\ 0 & 0 & 0 & 1-t-2(1-t) \end{array} \right)$$

ואז:

- אם $t \neq 1$ יהיה בשורה השנייה שורת סתירה ולא יהיה פתרון;

- אם $t=1$ נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

שהיא בצורה מדורגת, ללא שורת סתירה ועם משתנים חופשיים (z, y) ולכן במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות.

• $a=-2$ - נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & t \\ 0 & 3 & -3 & 1-t \\ 0 & 0 & 0 & 1+2t+(1-t) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & t \\ 0 & 3 & -3 & 1-t \\ 0 & 0 & 0 & 2+t \end{array} \right)$$

ואז:

- אם $t \neq -2$ יש בה שורת סתירה ולכן במקרה זה לא יהיה פתרון.

- אם $t = -2$ נקבל צורה מדורגת, ללא שורת סתירה ועם משתנה חופשי (z) ולכן במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות.

לסיכום: עבור $a=1, -2$ יש פתרון יחיד. עבור $a=1, t \neq 1$ או $a=-2, t \neq -2$ לא יהיה פתרון ועבור שאר המקרים $a=1, t=1$ או $a=-2, t=-2$ יהיו אינסוף פתרונות.

(ב) עבור כל ערכי של הפרמטרים a, t עבורם למערכת יש אינסוף פתרונות, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת. **פתרון:** ראינו שעבור $a=t=1$ נקבל את המערכת (אחרי דירוג)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

שהפתרון שלה הוא (אם נציב $z=s, y=t$)

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} 1-s-t \\ t \\ s \end{array} \right) \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) + \text{span} \left\{ \left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \right\}$$

ועבור $a = t = -2$ נקבל את המערכת (אחרי דירוג ונמשך לדרג)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

שהפתרון שלה הוא (אם נציב $z = t$)

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} t \\ 1+t \\ t \end{array} \right) \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) + \text{span} \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right) \right\}$$

3. נביט במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

(א) מצאו את A^{-1} .

פתרון: נשתמש באלגוריתם למציאת הופכית ונדרג את המטריצה $(A|I)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{array}{c} R_2-R_3 \\ R_1-R_3 \end{array}]{R_2-R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

ולכן

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ב) מצאו $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ עבורם $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

פתרון: נכפיל את השיויון המבוקש בשאלה ב A^{-1} משמאל ונקבל

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ג) נסמן $B = A - I$ כאשר I מטריצת היחידה. מצאו בסיסים ומימדים ל $R(B), C(B), N(B)$.

פתרון: נחשב מפורשות את B ונדרג אותה:

$$B = A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$N(B) \stackrel{\text{(המשתנה החופשי) } y=t}{=} \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס ל- $N(B)$ ולכן $\dim N(B) = 1$. בנוסף, השורות השונות מאפס בצורה מדורגת מהוות בסיס ל- $R(B)$ ולכן

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס ל- $R(B)$ ו- $\dim R(B) = 2$. ולסיום עמודות במטריצה B שיש בהם איברים פותחים בצורה מדורגת - מהוות בסיס ל- $C(B)$ ולכן (כיוון שיש איברים פותחים בעמודות 1 ו-3 בצורה מדורגת)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס ל- $C(B)$ ו- $\dim C(B) = 2$.

4. נביט בתתי המרחבים

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid x + y + z + w = 0 \right\}$$

$$W = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

(א) מצאו בסיסים ומימדים ל- U ול- W .

פתרון: נפתור את המערכת שמייצגת את U : המטריצה המייצגת שלה המערכת היא

$$(1 \ 1 \ 1 \ 1)$$

שהיא כבר מדורגת קונונית ולכן הפתרון הוא: ולכן, נציב פרמטרים במשתנים החופשיים $y = t_1, z = t_2, w = t_3$ ואז

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} -t_1 - t_2 - t_3 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right\}$$

בסיס ל- U ולכן $\dim U = 3$.

נעביר את W לייצוג על ידי מערכת משוואות ועל הדרך גם נמצא לו בסיס. נדרג את המטריצה:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 2 & -2 & -2 & y \\ 0 & -2 & 2 & 2 & z \\ 1 & 0 & 1 & 2 & w \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 2 & -2 & -2 & y \\ 0 & -2 & 2 & 2 & z \\ 0 & -1 & 1 & 1 & w - x \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_3 + R_2 \\ R_4 + \frac{1}{2}R_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 2 & -2 & -2 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z + y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w - x + \frac{1}{2}y \end{array} \right)$$

ומכיון שיש איברים פותחים בעמודה 1 ובעמודה 2 נקבל ש

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{array} \right) \right\}$$

בסיס של W ולכן $\dim W = 2$ ובנוסף,

$$W = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ w \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} z + y = 0 \\ w - x + \frac{1}{2}y = 0 \end{array} \right\}$$

(המשוואות שמאפיינות את W הם אלו שמהוות תנאי שקול לכך שלא תהיה סתירה במטריצה לעיל שדירגנו).

(ב) מצאו בסיס ומימד ל- $U \cap W$.

פתרון: בסעיף קודם ראינו ש

$$W = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ w \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} z + y = 0 \\ w - x + \frac{1}{2}y = 0 \end{array} \right\}$$

ולכן, בחיבור המשוואה שמאפיינת את U שנתונה בשאלה, נקבל

$$U \cap W = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ w \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} x + y + z + w = 0 \\ z + y = 0 \\ w - x + \frac{1}{2}y = 0 \end{array} \right\}$$

נפתור את המערכת שמייצגת את $U \cap W$ בעזרת דירוג הייצוג המטריצי שלה:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 + R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1\frac{1}{2} & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - \frac{3}{2}R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_2-R_3 \\ R_1-R_3 \end{smallmatrix}]{R_2-R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

ולכן, נציב פרמטר $w = t$ במשתנה החופשי ונקבל

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ -4t \\ 4t \\ t \end{pmatrix} \mid t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

1

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס לחיתוך והמימד הוא $\dim U \cap W = 1$.