

חדו"א 1 תרגיל מספר 2 תשפ"א - גבולות של סדרות

ענו על השאלות הבאות:

חלק א

1. תהא (a_n) סדרה המתכנסת לגבול L . הוכיחו כי סדרת הערכים המוחלטים $(|a_n|)$ מתכנסת ל $|L|$. בנוסף,
 - (א) מצאו סדרה (a_n) שאינה מתכנסת כך שסדרת הערכים המוחלטים $(|a_n|)$ כן מתכנסת ל 5 (כלומר הטענה ההפוכה אינה נכונה. אם $(|a_n|)$ מתכנסת זה לא גורר ש (a_n) מתכנסת)
 - (ב) מצאו סדרה (a_n) שאינה קבועה שמתכנסת ל 5- כך ש $(|a_n|)$ מתכנסת ל 5.
2. מצאו את הגבול של הסדרה $a_n = \frac{4n+8}{3n}$ לפי הגדרת הגבול. עבור $\epsilon = \frac{1}{10}$ מצאו N מתאים, עבור $\epsilon = \frac{1}{1000}$ מצאו N מתאים (N מתאים פירושו שמתקיים

$$\forall n \geq N : |a_n - L| < \epsilon$$

כאשר L הוא הגבול של הסדרה).

3. חשבו את הגבול של הסדרה $a_n = 4n^6 + n^5 - n^4 - 3n^3 - 2n^2 + 3n + 1$

4. מצאו את הגבולות של הסדרות הבאות:

(א) $a_n = \frac{5n^{10} + 5n^5 + 1}{3n^{10} + 4n^8 + 3}$

(ב) $a_n = \frac{-5n^4 + 3n^3 + n^2 + 3n - 2}{5n^5 + 3n^4 - 3n^3 + n^2 + n + 2}$

(ג) $a_n = \frac{-n^4 + 2n^2 - n + 1}{4n^5 - n^4 + n^3 + 2n^2 + 3n + 2}$

(ד) $a_n = \frac{8n^3 + 2n^2 + n - 1}{-2n^3 + n^2 - n - 3}$

(ה) $a_n = \frac{-n^4 + 2n^2 - n + 1}{-5n^4 + 3n^3 + n^2 + 3n - 2}$

(ו) $a_n = \frac{4n^5 - n^4 + n^3 + 2n^2 + 3n + 2}{5n^5 + 3n^4 - 3n^3 + n^2 + n + 2}$

(ז) $a_n = \frac{-2n^3 + n^2 - n - 3}{-n^4 + 2n^2 - n + 1}$

5. מצאו את הגבול של הסדרה

$$a_n = \sqrt{3n^6 + n^3 - 3n^2 + 3n + 3} - \sqrt{3n^6 - n^3 + n^2 - 2n}$$

6. מצאו את הגבול של הסדרה $a_n = \sqrt{n^4 + 9} - n^2$

7. מצאו את הגבול של $a_n = \frac{9^{n+9}}{11^{n-2}}$

חלק ב

1. תהא (a_n) סדרת מספרים חיוביים ששואפת לאפס. הוכיחו/הפריכו:

(א) הסדרה $(\sqrt{a_n})$ גם שואפת לאפס.

(ב) קיים k טבעי כך ש $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a_n = \infty$.

2. תהא (a_n) סדרה שאין לה גבול (אין גבול בכלל - לא סופי ולא אין סופי). הוכיחו/הפריכו:

(א) לסדרה $b_n = a_n \cdot a_n$ אין גבול (אין גבול בכלל - לא סופי ולא אין סופי).

(ב) לסדרה $b_n = a_n \cdot a_n$ יש גבול (גבול סופי או אין סופי).

בהצלחה! ☺