פתרון 4 בפונקציות מרוכבות

1. עבור הפונקציות $u(x,y)$ הבאות, מצאו $v(x,y)$ כך שהפונקציה

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

תהיה גזירה בתחום הנתון. בטאו את f לפי z (יוצא משהו פשוט).

(א) $u(x,y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y$ בכל $\mathbb{C}$.

פתרון: נמצא את v לפי משוואות קושי רימן

$$u_x(x,y) = (e^x + xe^x)\cos y - e^x y \sin y = v_y$$

ולכן

$$v(x,y) = \int (e^x + xe^x)\cos y - e^x y \sin y \mathrm{d}y$$

נזכור ש

$$\int y \sin y \mathrm{d}y = -y\cos y + \int \cos y \mathrm{d}y = -y\cos y + \sin y$$

ולכן

$$v(x,y) = (e^x+xe^x)\sin y + e^x(y\cos y - \sin y) + C(x) = xe^x \sin y + e^x y \cos y + C(x)$$

לפי משוואות קושי רימן השנייה,

$$v_x(x,y) = (e^x+xe^x)\sin y + e^x y\cos y + C'(x) = xe^x\sin y + e^x \sin y + e^x y \cos y = -u_y(x,y)$$

כלומר

$$C'(x) = 0$$

ולכן $C(x)$ קבוע. כלומר

$$v(x,y) = xe^x \sin y + e^x y \cos y + D \quad D \in \mathbb{R}$$

כמו כן קל לראות ש u,v שקיבלנו מקיימות את משוואות קושי רימן ולכן f שקיבלנו באמת גזירה. נשים לב ש

$$\begin{aligned} f(z) &= xe^x\cos y - ye^x \sin y + i(xe^x \sin y + e^x y\cos y + D) \\ &= xe^x(\cos y + i\sin y) - ye^x(\sin y - i\cos y) + iD \\ &= xe^x e^{iy} + iye^x(\cos y + i \sin y) + iD \\ &= xe^{x+iy} + iye^{x+iy} + iD = ze^z + iD \end{aligned}$$

(ב) $u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}+x$ ב $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.
פתרון: כמו בסעיף הקודם

$$u_y=\frac{-2xy}{x^2+y^2}=-v_x$$

כלומר

$$v_x=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

ולכן

$$v(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}+C(y)$$

לפי משוואת קושי רימן השניה

$$u_x=\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}+1=\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}+C'(y)$$

ולכן

$$C(y)=y+D \quad D\in\mathbb{R}$$

כלומר

$$v(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}+y+D$$

וקל לוודא שמשוואות קושי רימן מתקיימות. כמו כן,

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{x}{x^2+y^2}+x+i(-\frac{y}{x^2+y^2}+y+D)\\&=\frac{x-iy}{x^2+y^2}+x+iy+iD=\frac{\overline{z}}{|z|^2}+z+iD\\&=z+\frac{1}{z}+iD\end{aligned}$$

2. הביאו את המספרים הבאים לצורה קרטזית

(א) $\sin(i)$.
פתרון: לפי נוסחא

$$\sin i=i\sinh(1)=i\frac{e-e^{-1}}{2}$$

(ב) $\cos(-i)$.
פתרון: שוב לפי נוסחא

$$\cos(-i) = \cos i = \cosh 1 = \frac{e + e^{-1}}{2}$$

(ג) $\tan(1+i)$
פתרון: נסמן $z = 1 + i$ ואז

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\sin z}{\cos z}\frac{\cos \overline{z}}{\cos \overline{z}} = \frac{\sin(z+\overline{z}) + \sin(z-\overline{z})}{\cos(z+\overline{z}) + \cos(z-\overline{z})}$$

במקרה שלנו זה יוצא

$$\frac{\sin(2) + \sin(2i)}{\cos(2) + \cos(2i)} = \frac{\sin(2)}{\cos(2) + \cosh(2)} + i\frac{\sinh(2)}{\cos(2) + \cosh(2)}$$

3. מצאו את כל ערכי z עבורם $\sinh z = 0$.
פתרון:

$$0 = \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

כלומר

$$e^z = e^{-z}$$

כלומר

$$z = -z + 2\pi i k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z = \pi i k \quad k \in \mathbb{Z}$$

הערה:אפשר לקבל את התוצאה הזאת בקלות גם מהקשר $\sin(iz) = i\sinh(z)$

4. הוכיחו כי

(א) לכל z מתקיים $|e^z| \le e^{|z|}$
פתרון: אם $z = x + iy$ אז

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x| = e^x$$

$$e^{|z|} = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

היות ש $\sqrt{x^2+y^2} \ge x$ בוודאי ש

$$e^x \le e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(ב) מתקיים שוויון אם ורק אם z ממשי אי שלילי.
פתרון: אם z ממשי אי שלילי ברור שמתקיים שוויון. אם מתקיים שוויון אז

$$e^x = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

כלומר

$$x = \sqrt{x^2+y^2}$$

וזה וודאי מכריח $0 \leq x$ ו $y = 0$.

5. מצאו את כל הנקודות בהן $\cos\overline{z}$ גזירה.
פתרון:

$$\cos\overline{z} = \frac{e^{i(x-iy)} + e^{-i(x-iy)}}{2} = \frac{e^{ix}e^y + e^{-ix}e^{-y}}{2}$$

ברור שה $\frac{1}{2}$ לא משפיע אז נתעלם ממנו לנוחות. יש לנו

$$(\cos x + i\sin x)e^y + e^{-y}(\cos x - i\sin x)$$

כלומר

$$u(x,y) = \cos x(e^y + e^{-y}) \quad v(x,y) = \sin x(e^y - e^{-y})$$

ברור שהכל דיפרנציאבילי

$$\begin{aligned} u_x &= -\sin x(e^y + e^{-y}) \\ u_y &= \cos x(e^y - e^{-y}) \\ v_x &= \cos x(e^y - e^{-y}) \\ v_y &= \sin x(e^y + e^{-y}) \end{aligned}$$

כלומר משוואות קושי רימן הן

$$-\sin x(e^y + e^{-y}) = \sin x(e^y + e^{-y})$$

$$\cos x(e^y - e^{-y}) = -\cos x(e^y - e^{-y})$$

היות ש $e^y + e^{-y} > 0$ המשוואה הראשונה מכריחה ש $\sin x = 0$ כלומר ש $x = \pi k$
לכן $\cos x \neq 0$ והמשוואה השניה אומרת ש

$$e^y - e^{-y} = 0$$

שזה בקלות מכריח $y = 0$. לכן הנקודות היחידות שבהן הפונקציה גזירה הן

$$\{(\pi k, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

6. פתרו את המשוואה $e^{e^z} = 1$.
פתרון: לפי התכונות של e אנחנו יודעים בעצם ש

$$e^z = 2\pi ik \quad k \in \mathbb{Z}$$

אם $k = 0$ כמובן שאין לזה פתרון. עבור $k > 0$ נקבל

$$2\pi ik = e^{\ln(2\pi k)} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ולכן

$$z = \ln(2\pi k) + i\frac{\pi}{2} + 2\pi in \quad n \in \mathbb{Z}$$

ועבור $k < 0$ נקבל בדומה

$$z = \ln(2\pi |k|) - i\frac{\pi}{2} + 2\pi in \quad n \in \mathbb{Z}$$

אם נאחד את הפתרונות נקבל

$$z = \ln(2\pi |k|) + i\frac{\pi}{2} + \pi in \quad k, n \in \mathbb{Z} \quad k \neq 0$$