89-198 מתמטיקה בדידה – תרגיל 6

<u>שאלה 1</u>: תהי $A \neq \emptyset$ קבוצה, ויהיו R_1, R_2 יחסים על A. הוכח או הפרך:

א) אם R_1, R_2 רפלקסיביים אזי
- $R_1 \cap R_2$ רפלקסיבי.
- $R_1 \setminus R_2$ רפלקסיבי.
- $R_2 \circ R_1$ רפלקסיבי.

ב) אם R_1, R_2 סימטריים אזי
- $R_1 \cap R_2$ סימטרי.
- $R_1 \setminus R_2$ סימטרי.
- $R_2 \circ R_1$ סימטרי.

ג) אם R_1, R_2 אנטי-סימטריים אזי
- $R_1 \cap R_2$ אנטי-סימטרי.
- $R_1 \setminus R_2$ אנטי-סימטרי.
- $R_2 \circ R_1$ אנטי-סימטרי.

ד) אם R_1, R_2 טרנזיטיביים אזי
- $R_1 \cap R_2$ טרנזיטיבי.
- $R_1 \setminus R_2$ טרנזיטיבי.
- $R_2 \circ R_1$ טרנזיטיבי.

<u>פתרון שאלה 1</u>:

א) נניח ש R_1, R_2 רפלקסיביים.

יהי $a \in A$. מכיון ש R_1, R_2 רפלקסיביים נובע ש $(a,a) \in R_1 \wedge (a,a) \in R_2$.

a) מכיון ש $(a,a) \in R_1 \wedge (a,a) \in R_2$ נובע ש $(a,a) \in R_1 \cap R_2$, כלומר $R_1 \cap R_2$ רפלקסיבי.

b) מכיון ש $(a,a) \in R_2$ נובע ש $(a,a) \notin R_1 \setminus R_2$, כלומר $R_1 \setminus R_2$ לא רפלקסיבי.

c) מכיון ש $(a,a) \in R_1 \wedge (a,a) \in R_2$, ניתן להרכיב את (a,a) עם עצמו.
לכן $(a,a) \in R_2 \circ R_1$, כלומר $R_2 \circ R_1$ רפלקסיבי.

ב) נניח ש R_1, R_2 סימטריים.

a) יהיו $a, b \in A$, ונניח ש $(a,b) \in R_1 \cap R_2$, כלומר $(a,b) \in R_1$ וגם $(a,b) \in R_2$.
מכיון ש R_1 סימטרי נובע ש $(b,a) \in R_1$, ומכיון ש R_2 סימטרי נובע ש $(b,a) \in R_2$.
לכן $(b,a) \in R_1 \cap R_2$, כלומר $R_1 \cap R_2$ סימטרי.

b) יהיו $a, b \in A$, ונניח ש $(a,b) \in R_1 \setminus R_2$, כלומר $(a,b) \in R_1 \wedge (a,b) \notin R_2$.
מכיון ש R_1 סימטרי נובע ש $(b,a) \in R_1$.
בנוסף מכיון ש R_2 סימטרי ו $(a,b) \notin R_2$ נובע ש $(b,a) \notin R_2$,
אחרת אם $(b,a) \in R_2$ נקבל מהסימטריות של R_2 ש $(a,b) \in R_2$, וזו סתירה להנחה ש $(a,b) \notin R_2$.
כלומר $(b,a) \in R_1 \wedge (b,a) \notin R_2$, ולכן $(b,a) \in R_1 \setminus R_2$, כלומר $R_1 \setminus R_2$ סימטרי.

c) $R_2 \circ R_1$ לא סימטרי, נראה דוגמה נגדית.

תהי $A = \{1,2,3\}$ ויהיו $R_1 = \{(1,3),(3,1)\}, R_2 = \{(3,2),(2,3)\}$, אזי R_1, R_2 סימטריים.

כעת $(1,2) \in R_2 \circ R_1$ אולם $(2,1) \notin R_1 \circ R_2$.

ג) נניח ש R_1, R_2 אנטי-סימטריים.

a) יהיו $a, b \in A$, ונניח ש $(a,b),(b,a) \in R_1 \cap R_2$, בפרט $(a,b) \in R_1 \wedge (b,a) \in R_1$.

מכיון ש R_1 אנטי-סימטרי נובע ש $a = b$, לכן $R_1 \cap R_2$ אנטי-סימטרי.

b) יהיו $a, b \in A$, ונניח ש $(a,b),(b,a) \in R_1 \setminus R_2$, בפרט $(a,b) \in R_1 \wedge (b,a) \in R_1$.

מכיון ש R_1 אנטי-סימטרי נובע ש $a = b$, לכן $R_1 \setminus R_2$ אנטי-סימטרי.

c) $R_2 \circ R_1$ לא אנטי- סימטרי, נראה דוגמה נגדית.

תהי $A = \{1,2,3\}$ ויהיו $R_1 = \{(1,3),(2,3)\}, R_2 = \{(3,2),(3,1)\}$, אזי R_1, R_2 אנטי-סימטריים.

כעת $(1,2),(2,1) \in R_2 \circ R_1$ אולם $1 \neq 2$.

ד) נניח ש R_1, R_2 טרנזיטיביים.

a) יהיו $a, b \in A$, ונניח ש $(a,b),(b,c) \in R_1 \cap R_2$.

מכיון ש $(a,b) \in R_1 \wedge (b,c) \in R_1$ ו R_1 טרנזיטיבי נובע ש $(a,c) \in R_1$.

מכיון ש $(a,b) \in R_2 \wedge (b,c) \in R_2$ ו R_2 טרנזיטיבי נובע ש $(a,c) \in R_2$.

ולכן $(a,c) \in R_1 \cap R_2$, כלומר $R_1 \cap R_2$ טרנזיטיבי.

b) $R_1 \setminus R_2$ לא טרנזיטיבי, נראה דוגמה נגדית.

תהי $A = \{1,2,3\}$ ויהיו $R_1 = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}, R_2 = \{(1,3)\}$, אזי R_1, R_2 טרנזיטיביים.

כעת $(1,2),(2,3) \in R_1 \setminus R_2$ אולם $(1,3) \notin R_1 \setminus R_2$.

c) $R_2 \circ R_1$ לא טרנזיטיבי, נראה דוגמה נגדית.

תהי $A = \{1,2,3,4,5\}$ ויהיו $R_1 = \{(1,4),(2,5)\}, R_2 = \{(4,2),(5,3)\}$, אזי R_1, R_2 טרנזיטיביים.

כעת $(1,2),(2,3) \in R_2 \circ R_1$ אולם $(1,3) \notin R_2 \circ R_1$.

<u>שאלה 2</u>: תהי $A \neq \emptyset$ קבוצה ויהי R יחס על A.

נגדיר $B = P(A) \setminus \{\emptyset\}$, ונגדיר את היחס S על B באופן הבא:

$$S = \{\, (X,Y) \in B \times B \mid \exists x \in X \exists y \in Y : (x,y) \in R \,\}$$

הוכח או הפרך:

א) אם R רפלקסיבי אזי S רפלקסיבי.

ב) אם R סימטרי אזי S סימטרי.

ג) אם R טרנזיטיבי אזי S טרנזיטיבי.

<u>פתרון שאלה 2</u>:

א) נכון. נניח ש R רפלקסיבי ונראה ש S רפלקסיבי.

מכיון ש $A \neq \emptyset$ מתקבל שגם $B \neq \emptyset$.

תהי $X \in B$, כלומר $X \subseteq A$ ובנוסף $X \neq \emptyset$.

לכן קיים $x_0 \in X$, ומתקיים $x_0 \in A$. מכיון ש R רפלקסיבי ו $x_0 \in A$ נובע ש $(x_0, x_0) \in R$.

נקבל שלכל $X \in B$ קיים $x_0 \in X$ כך ש $(x_0, x_0) \in R$, כלומר $(X, X) \in S$.

נובע מכך שלכל $X \in B$ מתקיים $(X, X) \in S$.

לכן אם R רפלקסיבי אזי S רפלקסיבי.

ב) נכון.

תהינה $X, Y \in B$. נניח ש $(X, Y) \in S$ ונוכיח ש $(Y, X) \in S$.

מכיון ש $(X, Y) \in S$, מתקיים $\exists x \in X \exists y \in Y: (x, y) \in R$.

כלומר קיים $x_0 \in X$ וקיים $y_0 \in Y$ כך ש $(x_0, y_0) \in R$.

מכיון ש R סימטרי, נובע ש $(y_0, x_0) \in R$, ונקבל ש $\exists y \in Y \exists x \in X: (y, x) \in R$, כלומר $(Y, X) \in S$.

לכן אם R סימטרי אזי S סימטרי.

ג) לא נכון. נראה דוגמה נגדית.

תהי $A = \{1,2,3,4\}$ ויהי $R = \{(1,2), (3,4)\}$. אזי R טרנזיטיבי באופן ריק.

כעת נסמן $X = \{1\}, Y = \{2,3\}, Z = \{4\}$. מתקיים $X, Y, Z \in P(A) \setminus \{\emptyset\}$.

מכיון ש $1 \in X, 2 \in Y$ ומתקיים $(1,2) \in R$, אזי $(X, Y) \in S$.

מכיון ש $3 \in Y, 4 \in Z$ ומתקיים $(3,4) \in R$, אזי $(Y, Z) \in S$.

אולם $(X, Z) \notin S$ מכיון ש $(1,4) \notin R$.

לכן S לא טרנזיטיבי.

<u>שאלה 3</u>: (36 נקודות) הוכח או הפרך:

א) אם (A_1, R_1) ו (A_2, R_2) קבוצות סדורות חלקית ו $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ אזי $R_1 \cup R_2$ הוא יחס סדר חלקי על $A_1 \cup A_2$.
ב) אם (A_1, R_1) ו (A_2, R_2) קבוצות סדורות לינארית ו $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ אזי $R_1 \cup R_2$ הוא יחס סדר מלא על $A_1 \cup A_2$.
ג) אם (A, R) קבוצה סדורה חלקית וב A יש אבר R-מינימלי יחיד, אזי הוא האבר הקטן ביותר ב A.
ד) אם (A, R) קבוצה סדורה לינארית וב A יש אבר R-מינימלי יחיד, אזי הוא האבר הקטן ביותר ב A.

<u>פתרון שאלה 3</u>:

א) נכון. נניח ש (A_1, R_1) ו (A_2, R_2) קבוצות סדורות חלקית ו $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
אם $A_1 = A_2 = \emptyset$ בהכרח $R_1 = R_2 = \emptyset$ ונקבל ש $R_1 \cup R_2 = \emptyset$ הוא יחס סדר חלקי על $A_1 \cup A_2 = \emptyset$.
אחרת, נוכיח רפלקסיביות, אנטי סימטריות וטרנזיטיביות:
<u>רפלקסיביות</u>: יהי $a \in A_1 \cup A_2$.
אם $a \in A_1$ אזי מכיון ש R_1 יחס סדר חלקי על A_1, הוא בפרט רפלקסיבי, לכן $(a, a) \in R_1$, ו $(a, a) \in R_1 \cup R_2$.
אם $a \in A_2$ אזי מכיון ש R_2 יחס סדר חלקי על A_2, הוא בפרט רפלקסיבי, לכן $(a, a) \in R_2$, ו $(a, a) \in R_1 \cup R_2$.
<u>אנטי סימטריות</u>: יהיו $a, b \in A_1 \cup A_2$, ונניח ש $(a, b), (b, a) \in R_1 \cup R_2$.
אם $(a, b), (b, a) \in R_1$ אזי מכיון ש R_1 יחס סדר חלקי על A_1, הוא בפרט אנטי סימטרי, ולכן $a = b$.

אם $(a,b),(b,a)\in R_2$ אזי מכיון ש R_2 יחס סדר חלקי על A_2, הוא בפרט אנטי סימטרי, ולכן $a=b$.
המצב שבו $(a,b)\in R_1$ ו $(b,a)\in R_2$ (או להיפך) לא יתכן, אחרת נקבל סתירה ל $A_1\cap A_2=\emptyset$.
<u>טרנזיטיביות</u>: יהיו $a,b,c\in A_1\cup A_2$, ונניח ש $(a,b),(b,c)\in R_1\cup R_2$.
אם $(a,b),(b,c)\in R_1$ אזי מכיון ש R_1 יחס סדר חלקי על A_1, הוא בפרט טרנזיטיבי, ולכן $(a,c)\in R_1$, כלומר $(a,c)\in R_1\cup R_2$.
אם $(a,b),(b,c)\in R_2$ אזי מכיון ש R_2 יחס סדר חלקי על A_2, הוא בפרט טרנזיטיבי, ולכן $(a,c)\in R_2$, כלומר $(a,c)\in R_1\cup R_2$.
המצב שבו $(a,b)\in R_1$ ו $(b,c)\in R_2$ (או להיפך) לא יתכן, אחרת נקבל סתירה ל $A_1\cap A_2=\emptyset$.

ב) לא נכון. נראה דוגמה נגדית:
תהיינה $A=\{1\},B=\{2\}$ ונגדיר $R_1=\{(1,1)\},R_2=\{(2,2)\}$ אזי (A_1,R_1) ו (A_2,R_2) קבוצות סדורות לינארית.
אולם עבור $1,2\in A_1\cup A_2$ נקבל $(1,2)\notin R_1\cup R_2$ וגם $(2,1)\notin R_1\cup R_2$.

ג) לא נכון. נראה דוגמה נגדית:
נגדיר $A=\mathbb{Z}$, $R=\{(a,b)\in(\mathbb{Z}\setminus\{0\})\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})\mid a\le b\}\cup\{(0,0)\}$. נראה ש R יחס סדר חלקי על $\mathbb{Z}$.
<u>רפלקסיביות</u>: יהי $a\in\mathbb{Z}$. עבור $a=0$ מתקיים $(0,0)\in R$, אחרת $a\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ ומתקיים $a\le a$, לכן $(a,a)\in R$.
<u>אנטי סימטריות</u>: יהיו $a,b\in\mathbb{Z}$ ונניח ש $(a,b),(b,a)\in R$.
אם $a=0\vee b=0$ אזי לפי הגדרת R בהכרח $(a,b)=(b,a)=(0,0)$ ונקבל $a=b$.
אחרת $a,b\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ ומתקיים $a\le b\wedge b\le a$, לכן $a=b$.
<u>טרנזיטיביות</u>: יהיו $a,b,c\in\mathbb{Z}$ ונניח ש $(a,b),(b,c)\in R$.
אם $a=0\vee b=0\ \vee c=0$ אזי לפי הגדרת R בהכרח $(a,b)=(b,c)=(0,0)$ ונקבל $(a,c)=(0,0)\in R$.
אחרת $a,b,c\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ ומתקיים $a\le b\wedge b\le c$, לכן $a\le c$.
<u>קיום אבר מינימלי</u>: $0\in\mathbb{Z}$ הוא אבר מינימלי, מכיון שלא קיים $x\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ כך ש $(x,0)\in R$.
<u>יחידות אבר מינימלי</u>: נראה ש 0 הוא האבר המינימלי היחיד. יהי $x\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, נראה ש x אינו מינימלי:
אם $x=1$ אזי $-1\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ ומתקיים $-1\le 1$ לכן $(-1,1)\in R$ ובנוסף $-1\ne 1$, לכן x אינו מינימלי.
אם $x\ne 1$ אזי $x-1\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ ומתקיים $x-1\le x$ לכן $(x-1,x)\in R$ ובנוסף $x-1\ne x$, לכן x אינו מינימלי.
<u>אין אבר קטן ביותר</u>: 0 אינו אבר אבר קטן ביותר. למשל עבור $1\in\mathbb{Z}$ מתקיים $(0,1)\notin R$.

ד) נכון. נניח ש (A,R) קבוצה סדורה לינארית.
נגדיר את הפרדיקט $M(b)=\Big(\forall x\in A\big((x,b)\in R\Rightarrow b=x\big)\Big)$
נניח ש $b\in A$ הוא אבר R-מינימלי, כלומר מתקיים $M(b)$.
נניח בנוסף שהוא יחיד, כלומר $\forall c\in A(M(c)\Rightarrow b=c)$.
נוכיח ש b הוא האבר הקטן ביותר, כלומר $\forall x\in A\colon(b,x)\in R$.
נניח בשלילה שקיים $x\in A$ עבורו מתקיים $(b,x)\notin R$.
מכיון ש R יחס סדר מלא מתקיים $(b,x)\in R\vee(x,b)\in R$, ולכן בהכרח $(x,b)\in R$.
מכיון ש b אבר R-מינימלי בהכרח $b=x$, ונקבל ש $(b,b)\notin R$. זו סתירה לרפלקסיביות.
לכן לכל $x\in A$ מתקיים $(b,x)\in R$, כלומר b האבר הקטן ביותר.