פתרון תרגיל 9

1. חשבו את השאריות של הפונקציות הבאות בנקודות הנתונות

א. $f(z)=\dfrac{e^z-z\cos z}{z^6},\ z_0=0$

ב. $g(z)=\dfrac{1}{z\cdot\sin z},\ z_0=0$

ג. $h(z)=\dfrac{1}{(z^3-1)^2},\ z_0=1$

פתרון: א. מפיתוח לטור טיילור של המונה נקבל

$$f(z)=\frac{e^z-z\cos z}{z^6}=\frac{1}{z^6}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}-z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-6}}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n-5}}{(2n)!}=...+\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{4!}\right)\frac{1}{z}+...$$

לכן $\text{Res}(f,0)=\frac{1}{5!}-\frac{1}{4!}$.

ב. קל לבדוק שלפונקציה $z\cdot\sin z$ יש אפס מסדר שני ב־$z_0=0$, לכן ל־g יש קוטב מסדר שני בנקודה זו. כדי למצוא את השארית נשתמש בנוסחא

$$\text{Res}(g,z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}}\left((z-z_0)^m\cdot g(z)\right)$$

אם $z=z_0$ היא קוטב מסדר m של g. במקרה שלנו $z_0=0$ ו־$m=2$, לכן נקבל

$$\text{Res}(g,0)=\lim_{z\to 0}\frac{\partial}{\partial z}\left(z^2\cdot\frac{1}{z\cdot\sin z}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{\sin z}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z-z\cdot\cos z}{\sin^2 z}\underset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{z\to 0}\frac{z\cdot\sin z}{2\sin z\cos z}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{2\cos z}=0.$$

לכן $\text{Res}(g,0)=0$.

ג. נשתמש בפירוק $z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$ כדי לרשום את h בצורה

$$h(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z^2+z+1)^2}=\frac{h_0(z)}{(z-1)^2}$$

כאשר
$$h_0(z) = \frac{1}{(z^2+z+1)^2}.$$
כיוון ש־$h_0(1) \neq 1$ נובע של־h יש קוטב מסדר שני ב־$z_0 = 1$. נשתמש שוב באותה נוסחא כמו בסעיף ב' כדי למצוא את השארית ב־$z_0 = 1$
$$\text{Res}(h,1) = \lim_{z\to 1} \frac{\partial}{\partial z}\left((z-1)^2 \cdot \frac{1}{(z-1)^2(z^2+z+1)^2}\right)$$
$$= \lim_{z\to 1} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{(z^2+z+1)^2}\right) = \lim_{z\to 1} \frac{-2\cdot(2z+1)}{(z^2+z+1)^3} = -\frac{2}{9}.$$

2. פתחו את הפונקציות הבאות לטור לורן סביב הנקודות הנתונות ומצאו את השארית של כל פונקציה בעזרת הפיתוח שמצאתם

א. $f(z) = (2z^5 - 4z^2)\sin\left(\frac{1}{z^2}\right),\ z_0 = 0$

ב. $g(z) = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{z-1}\right) - \cos(2z)}{(z-1)^5},\ z_0 = 1$

ג. $h(z) = \dfrac{z-\frac{\pi}{2}}{\cos^2(z)},\ z_0 = \dfrac{\pi}{2}$

<u>פתרון:</u> א. נשתמש בפיתוח לטור טיילור של סינוס ונקבל
$$f(z) = (2z^5-4z^2)\sin\left(\frac{1}{z^2}\right) = (2z^5-4z^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{4n+2}}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{4n-3}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{4n}}$$
בטור השני כל החזקות הן זוגיות ולכן ממנו לא נקבל שארית. בטור הראשון המקדם של $\frac{1}{z}$ מתקבל כאשר $n=1$ ואז $a_{-1} = -\frac{2}{3!} = -\frac{1}{3}$. לכן $\text{Res}(f,0) = -\frac{1}{3}$.

ב. נגדיר את הפונקציות
$$g_1(z) = \frac{\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)}{(z-1)^5}, \quad g_2(z) = \frac{\cos 2z}{(z-1)^5}$$

נפתח את g_1 לטור לורן סביב $z_0 = 1$ ונמצא את השארית בנקודה זו

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)}{(z-1)^5} = \frac{1}{(z-1)^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n+6}}.$$

כיוון שהחזקה הכי גבוהה של הטור היא שש נובע שהמקדם של $\frac{1}{z}$ הוא אפס, כלומר $\text{Res}(g_1, 1) = 0$. כעת נפתח את g_2 לטור לורן סביב $z_0 = 1$ ונמצא את השארית בנקודה זו

$$g_2(z) = \frac{\cos 2z}{(z-1)^5} = \frac{\cos(2z-2+2)}{(z-1)^5}$$

$$= \frac{\cos(2z-2)\cos(2) - \sin(2z-2)\sin 2}{(z-1)^5}$$

$$= \frac{\cos 2}{(z-1)^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{(2z-2)^{2n}} - \frac{\sin 2}{(z-1)^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(2z-2)^{2n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(2n)!}\cdot\frac{\cos 2}{(z-1)^{2n+5}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}(2n+1)!}\cdot\frac{\sin 2}{(z-1)^{2n+6}}$$

כיוון שהחזקה הכי גבוהה של הטור היא חמש נובע שהמקדם של $\frac{1}{z}$ הוא אפס, כלומר $\text{Res}(g_2, 1) = 0$. לכן כיוון ש־$g = g_1 - g_2$ נקבל את הפיתוח לטור לורן של g סביב $z_0 = 1$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n+6}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(2n)!}\cdot\frac{\cos 2}{(z-1)^{2n+5}}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}(2n+1)!}\cdot\frac{\sin 2}{(z-1)^{2n+6}}.$$

כמו כן, $\text{Res}(g, 1) = \text{Res}(g_1, 1) - \text{Res}(g_2, 1) = 0 - 0 = 0$.

ג. נשתמש בזהות $\cos z = -\sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$ ומפיתוח של סינוס לטור טיילור

$$h(z) = \frac{z-\frac{\pi}{2}}{\cos^2 z} = \frac{z-\frac{\pi}{2}}{\sin^2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{z-\frac{\pi}{2}}{\left(z-\frac{\pi}{2} - \frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} - \ldots\right)^2}$$

$$= \frac{1}{z-\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}{3!}+\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^4}{5!}-...\right)^2}$$

$$= \frac{1}{z-\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\left(1-\left(\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}{3!}-\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^4}{5!}+...\right)\right)^2}$$

$$= \frac{1}{z-\frac{\pi}{2}} \cdot \left(1+\left(\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}{3!}-\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^4}{5!}+...\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}{3!}-\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^4}{5!}+...\right)^2+...\right)^2$$

$$\frac{1}{z-\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}{6}+\frac{7\cdot\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^4}{360}+\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^6(...)\right)^2$$

$$= \frac{1}{z-\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{3}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{15}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^4+\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^6(...)\right)$$

$$= \frac{1}{z-\frac{\pi}{2}}+\frac{z-\frac{\pi}{2}}{3}+\frac{1}{15}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3+...$$

לכן $\operatorname{Res}\left(h,\frac{\pi}{2}\right)=1$.

3. חשבו את האינטגרלים הבאים

א. $\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}}\sin\left(\frac{1}{z}\right)dz$ ב. $\int_{|z|=2}\frac{\overline{z}+z^2}{z+3}dz$

ג. $\int_\gamma \tan z dz$ כאשר γ היא המלבן עם הקודקודים ב־$\pm\pi\pm i$.

ד. $\int_{|z|=3}\frac{3}{(5-z)(z-2)^4}dz$ ה. $\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 3\theta d\theta}{5-4\cdot\cos 2\theta}$

ו. $\int_\gamma\frac{1+z}{\sin z}dz$ כאשר γ היא האליפסה $\frac{x^2}{16}+y^2=1$.

<u>פתרון</u>: א. נפתח את הפונקציה $f(z)=e^{\frac{1}{z}}\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ לטור לורן סביב $z_0=0$:

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}\sin\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{e^{\frac{1}{z}}}{2i}\left(e^{\frac{i}{z}}-e^{-\frac{i}{z}}\right)=\frac{1}{2i}\left(e^{\frac{1+i}{z}}-e^{\frac{1-i}{z}}\right)=$$

$$\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}\frac{1}{z^n}-\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n}{n!}\frac{1}{z^n}.$$

המקדם של $\frac{1}{z}$ בטור האחרון הוא $\frac{1}{2i}(1+i-(1-i))=1$. לכן ממשפט השארית נקבל

$$\int_{|z|=1}e^{\frac{1}{z}}\sin\left(\frac{1}{z}\right)dz=2\pi i\cdot\mathrm{Res}(f,0)=2\pi i\cdot 1=2\pi i.$$

ב. על המעגל $|z|=2$ מתקיים $z\cdot\overline{z}=4$. לכן

$$\int_{|z|=2}\frac{\overline{z}+z^2}{z+3}dz=\int_{|z|=2}\frac{\frac{4}{z}+z^2}{z+3}dz$$

$$=4\int_{|z|=2}\frac{dz}{z\cdot(z+3)}+\int_{|z|=2}\frac{z^2}{z+3}dz$$

$$=\frac{4}{3}\int_{|z|=2}\frac{dz}{z}-\frac{4}{3}\int_{|z|=2}\frac{dz}{z+3}+\int_{|z|=2}\frac{z^2}{z+3}dz$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בפירוק לשברים חלקיים באינטגרל הראשון. הפונקציות בשני האינטגרלים האחרונים הן אנליטיות בתוך העיגול $|z|\leq 2$ ולכן שני אינטגרלים אלו מתאפסים. כמו כן, קל לבדוק שבנקודה $z_0=0$ לפונקציה $\frac{1}{z}$ יש אפס מסדר ראשון עם שארית 1. לכן ממשפט השארית נקבל שהאינטגרל שווה ל-$\frac{8\pi i}{3}$.

ג. בתוך העקומה C לפונקציה $f(z)=\tan z$ יש סינגולריות בנקודות $z_0=\pm\frac{\pi}{2}$. כיוון שנקודות אלו הן אפסים פשוטים של פונקציית הקוסינוס נובע שאלו קטבים פשוטים של f. לכן מהנוסחא לחישוב השארית במקרה של קוטב פשוט:

$$\mathrm{Res}\left(f,\pm\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{z\to\pm\frac{\pi}{2}}\left(z\pm\frac{\pi}{2}\right)\cdot\tan z=\lim_{z\to\pm\frac{\pi}{2}}\frac{\left(z\pm\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin z}{\cos z}$$

$$=\lim_{z\to\pm\frac{\pi}{2}}\frac{\sin z+\left(z\pm\frac{\pi}{2}\right)\cos z}{-\sin z}=-1.$$

לכן ממשפט השארית נקבל שהאינטגרל שווה ל-$-2\pi i-2\pi i=-4\pi i$.

ד. לפונקציה f שבתוך האינטגרל יש נקודות סינגולאריות ב־$z=2,5$. מבין נקודות אלו רק הנקודה $z_0=2$ נמצאת בתוך המעגל $|z|=3$. לכן נפתח את f לטור לורן סביב הנקודה $z_0=2$ ונמצא את השארית של f בנקודה זו

$$f(z)=\frac{3}{(5-z)\cdot(2-z)^4}=\frac{3}{(z-4)^4}\cdot\frac{1}{3-(z-2)}$$

$$=\frac{1}{(z-4)^4}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-2}{3}}=\frac{1}{(z-2)^4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{3}\right)^n$$

$$=\frac{1}{(z-2)^4}+\frac{1}{3}\frac{1}{(z-2)^3}+\frac{1}{3^2}\frac{1}{(z-2)^2}+\frac{1}{3^3}\frac{1}{(z-2)}+...$$

לכן $a_{-1}=\frac{1}{27}$ ולכן ממשפט השארית נקבל שהאינטגרל שווה ל־$\frac{2\pi i}{27}$.

ה. נשתמש בזהות $\cos^2 3\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 6\theta)$ ונקבל

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 3\theta d\theta}{5-4\cdot\cos 2\theta}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{(1+\cos 6\theta)d\theta}{5-4\cdot\cos 2\theta}$$

כעת נבצע החלפת משתנים $x=2\theta, dx=2d\theta$ ונקבל שהאינטגרל שווה ל־

$$\frac{1}{4}\int_0^{4\pi}\frac{(1+\cos 3x)dx}{5-4\cdot\cos x}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{(1+\cos 3x)dx}{5-4\cdot\cos x}$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בכך שהפונקציה בתוך האינטגרל מחזורית 2π לכן האינטגרל בקטע $[0,2\pi]$ שווה לאינטגרל בקטע $[2\pi,4\pi]$. כעת נשתמש בזהות $\cos x=\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$ ונקבל שהאינטגרל שווה ל־

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{(1+\frac{1}{2}e^{3ix}+\frac{1}{2}e^{-3ix})dx}{5-2e^{ix}-2e^{-ix}}=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{\left(2e^{3ix}+e^{6ix}+1\right)dx}{5e^{3ix}-2e^{4ix}-2e^{2ix}}.$$

נשתמש בהחלפת המשתנים $z=e^{ix}, dx=\frac{dz}{iz}$. כיוון ש־$0\le x\le 2\pi$ נובע שהאינטגרציה לפי z היא על מעגל היחידה. לכן האינטגרל שווה ל־

$$\frac{1}{4i}\int_{|z|=1}\frac{\left(2z^3+z^6+1\right)dz}{5z^4-2z^5-2z^3}=-\frac{1}{4i}\int_{|z|=1}\frac{\left(2z^3+z^6+1\right)dz}{z^3(2z-1)(z-2)}$$

$$=-\frac{1}{4i}\left(\int_{|z|=1}\frac{2dz}{(2z-1)(z-2)}+\int_{|z|=1}\frac{z^3dz}{(2z-1)(z-2)}\right.$$

$$\left.+\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^3(2z-1)(z-2)}\right)$$

קל לבדוק שלפונקציות בשני האינטגרלים הראשונים יש קטבים פשוטים ב־ $z=\frac{1}{2}$ (הקוטב ב־$z=2$ נמצא מחוץ למעגל $|z|=1$). לכן מהנוסחא לחישוב שארית במקרה של קוטב פשוט נקבל שהשאריות עבור פונקציות אלו בנקודה $z=\frac{1}{2}$ הן

$$-\frac{1}{4i}\lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{2}{(2z-1)(z-2)}=-\frac{1}{4i}\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{1}{z-2}=\frac{1}{6i},$$

$$-\frac{1}{4i}\lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{z^3}{(2z-1)(z-2)}=-\frac{1}{4i}\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{z-2}=\frac{1}{96i}.$$

לפונקציה באינטגרל השלישי יש קוטב פשוט בנקודה $z=\frac{1}{2}$ וקוטב מסדר שלישי ב־$z=0$ (הקוטב $z=2$ נמצא מחוץ למעגל $|z|=2$). לכן מהנוסחא לחישוב שארית במקרה של קוטב פשוט נקבל שהשארית של הפונקציה בנקודה $z=\frac{1}{2}$ היא

$$-\frac{1}{4i}\lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{z^3(2z-1)(z-2)}=\frac{2}{3i}$$

ומהנוסחא לחישוב שארית במקרה של קוטב מסדר שלוש נקבל שהשארית ב־$z=0$ היא

$$-\frac{1}{4i}\cdot\frac{1}{2}\lim_{z\to0}\left(z^3\cdot\frac{1}{z^3(2z-1)(z-2)}\right)''$$

$$=-\frac{1}{8i}\lim_{z\to0}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2z-1}\right)''$$

$$=-\frac{1}{8i}\lim_{z\to0}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{(z-2)^3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{16}{(2z-1)^3}\right)=-\frac{21}{32i}.$$

לכן ממשפט השארית נקבל שכל האינטגרל שווה ל־

$$2\pi i\left(\frac{1}{6i}+\frac{1}{96i}+\frac{2}{3i}-\frac{21}{32i}\right)=\frac{9\pi}{24}.$$

ו. לפונקציה $f(z)=\frac{1+z}{\sin z}$ יש קטבים פשוטים בנקודות $z=n\pi$, מאילו רק הנקודות $z=0,\pm\pi$ נמצאות בתוך האליפסה $\frac{x^2}{16}+y^2=1$. מהנוסחא לחישוב שארית במקרה של קוטב פשוט נקבל

$$\text{Res}(f,n\pi)=\lim_{z\to n\pi}(z-n\pi)\cdot f(z)=\lim_{z\to n\pi}\frac{(z-n\pi)\cdot(z+1)}{\sin z}$$

$$= (1 + n\pi) \cdot \lim_{z \to n\pi} \frac{(z - n\pi)}{\sin z} \underset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{z \to n\pi} (1 + n\pi) \cdot \frac{1}{\cos z}$$

$$= (-1)^n (1 + n\pi).$$

לכן ממשפט השארית נקבל שהאינטגרל שווה ל־

$$2\pi i \left(\text{Res}(f, -\pi) + \text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, \pi)\right)$$

$$= 2\pi i(-(1 - \pi) + 1 - (1 + \pi)) = -2\pi i.$$