תרגיל בית 2 פתרון- גאומטריה אוקלידית ואנליטית, מתרגלת: זהבית צבי

הערה: בכל התרגיל נשתמש במכפלה הפנימית הסטנדרטית עבור וקטורי עמודה: $\langle v,w\rangle = v^T w$.

שאלה 1: תהי S הקבוצה המורכבת מהווקטורים הבאים ב-$\mathbb{R}^3$:

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, u_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, u_3=\begin{pmatrix}5\\-4\\-1\end{pmatrix}$$

א. הראו כי S היא בסיס אורתוגונלי ל-$\mathbb{R}^3$, כלומר קבוצה אורתוגונלית שהיא גם בסיס ל-$\mathbb{R}^3$.

ב. השתמשו בתוצאה של סעיף א' בכדי לקבל בסיס אורתונורמלי ל-$\mathbb{R}^3$.

פתרון:

א. אנו יודעים כי המימד של $\mathbb{R}^3$ הוא שלוש, כלומר כל קבוצה של שלושה ווקטורים בת"ל היא בסיס למרחב זה.
לכן מספיק להראות כי הווקטורים של הקבוצה S הם בת"ל ובכך יהווה בסיס.
לפי משפט שלמדנו בכיתה: כל קבוצה אורתוגונלית שוקטור האפס לא נמצא בה היא בת"ל. לכן, כיוון שוקטור האפס לא נמצא בקובצה נותר להראות כי S קבוצה אורתוגונלית.
נחשב את המכפלות הפנימיות:

$$\langle u_1,u_2\rangle = 1\cdot1+1\cdot2+1\cdot(-3)=0$$
$$\langle u_1,u_3\rangle = 1\cdot5+1\cdot(-4)+1\cdot(-1)=0$$
$$\langle u_2,u_3\rangle = 1\cdot5+2\cdot(-4)+(-3)\cdot(-1)=0$$

מכאן קיבלנו כי S קבוצה אורתוגונלית וכיוון שוקטור האפס לא נמצא בה אז היא בת"ל.
ולפי הטענה הראשונה היא הסיס אורתוגונלי ל $\mathbb{R}^3$.

ב. מבדיקה ראשונית של וקטור u_1 ניתן לראות כי האורך שלו אינו 1. ולכן ננרמל את כל הוקטורים שאורכם אינו אחד ע"מ לקבל בסיס אורתונורמלי.

נחשב את הנורמה של כל ווקטור:

$$\|u_1\|=\sqrt{\langle u_1,u_1\rangle}=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$$
$$\|u_2\|=\sqrt{\langle u_2,u_2\rangle}=\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{14}$$
$$\|u_3\|=\sqrt{\langle u_3,u_3\rangle}=\sqrt{5^2+(-4)^2+(-1)^2}=\sqrt{42}$$

והבסיס האורתונורמלי שנקבל:

$$\widetilde{u_1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}, \widetilde{u_2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}}\\ \frac{2}{\sqrt{14}}\\ -\frac{3}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}, \widetilde{u_3}=\begin{pmatrix}\frac{5}{\sqrt{42}}\\ -\frac{4}{\sqrt{42}}\\ -\frac{1}{\sqrt{42}}\end{pmatrix}$$

<u>שאלה 2</u>: מצאו בסיס אורתונורמלי לתת-מרחב V של $\mathbb{R}^4$ הנפרש ע"י הווקטורים:

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\-4\end{pmatrix}$$

הניחו כי הווקטורים הנתונים הם בת"ל.

<u>פתרון</u>

הווקטורים הנתונים אינם קבוצה אורתוגונלית, מספיק לבדוק זוג אחד להראות זאת, למשל:

$$\langle v_1,v_2\rangle=1\cdot1+1\cdot(-1)+1\cdot2+1\cdot2=4\neq0$$

נשתמש בנתון כי הקבוצה בת"ל ונפעיל את תהליך גראם-שמידט בכדי לקבל בסיס אורתוגונלי לתת מרחב הנתון V:

$$w_1=v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$w_2=v_2-\frac{\langle v_2,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\cdot\overrightarrow{w_1}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix}-\underbrace{\frac{1\cdot1-1\cdot1+2\cdot1+2\cdot1}{4\cdot1^2}}_{\frac{4}{4}=1}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$w_3=v_3-\frac{\langle v_3,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\cdot\overrightarrow{w_1}-\frac{\langle v_3,w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\cdot\overrightarrow{w_2}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\-4\end{pmatrix}-\underbrace{\frac{1\cdot1+2\cdot1+(-3)\cdot1+(-4)\cdot1}{4}}_{-\frac{4}{4}=-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\underbrace{\frac{1\cdot0+2\cdot(-2)+(-3)\cdot1+(-4)\cdot1}{0^2+(-2)^2+1^2+1^2}}_{-\frac{11}{6}}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{11}{6}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{6}\\-\frac{7}{6}\end{pmatrix}$$

מותר לנו בווקטור האחרון "להיפטר מהשברים" ע"י הכפלה במספר קבוע כלשהו (שונה מ-0), מכיוון שכפולה כזו אינה משנה את האורתוגונליות כלפי הווקטורים האחרים, כי הרי אם המכפלה הפנימית מתאפסת, גם אם נכפול את הווקטור בקבוע, המכפלה הפנימית עדין תתאפס.

לכן נכפול ב-6 את הווקטור האחרון ונקבל בסיס אורתוגונלי לתת-מרחב V:

$$w_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ w_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\1\end{pmatrix},\ w_3=\begin{pmatrix}12\\-4\\-1\\-7\end{pmatrix}$$

לבסוף, בכדי לקבל בסיס אורתונורמלי, ננרמל את הווקטורים שקיבלנו:

$$\|w_1\|=\sqrt{4}=2\ ,\ \|w_2\|=\sqrt{6}\ ,\ \|w_3\|=\sqrt{12^2+(-4)^2+(-1)^2+(-7)^2}=\sqrt{210}$$

והווקטורים המנורמלים (בסיס אורתונורמלי) הם:

$$u_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ u_2=\begin{pmatrix}0\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\ u_3=\begin{pmatrix}\frac{12}{\sqrt{210}}\\-\frac{4}{\sqrt{210}}\\-\frac{1}{\sqrt{210}}\\-\frac{7}{\sqrt{210}}\end{pmatrix}$$

<u>שאלה 3:</u> יהיו $u_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ u_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ u_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ u_4=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

הראו כי (u_1,u_2,u_3,u_4) זה בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^4$ (מבלי להוכיח בת״ל ופורשת).

<u>פתרון:</u>

נחשב את המכפלות הפנימיות לכל שני וקטורים: $1\le i\ne j\le 4$.

$$\langle u_i,u_j\rangle=2\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\left(\frac{1}{2}\right)^2=0$$

כעת נחשב נורמה לכל וקטור בנפרד ונקבל שהאפשרות היחידה עבור כל הוקטורים היא:

$\|u_i\|=\sqrt{4\cdot\left(\pm\frac{1}{2}\right)^2}=1$ לכל $1\le i\le 4$.

תחילה קיבלנו קבוצה אורתוגונלית בעלת 4 ווקטורים ב- $\mathbb{R}^4$ וכמו כן וקטור האפס לא נמצא בה ולכן הקבוצה בת״ל. כיוון שהמימד של הקבוצה כמימד המרחב(4) נקבל שהיא בסיס אורתוגונלי.
לאחר שחישבנו את הנורמה אנו רואים שהנורמה של כל אחד מהוקטורים היא 1 (שורש של המכפלה הפנימית של כל וקטור עם עצמו) ולכן, סה״כ נקבל בסיס אורתונורמלי ל- $\mathbb{R}^4$. מש״ל.

שאלה 4: חשב את הדטרמיננטה באמצעות שיטת הדירוג

א. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ תשובה סופית: 13-

פתרון

נבצע דירוג דטרמיננטה לפי פעולות שורה:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \underset{R_3-2R_1\to R_3}{\overset{R_2-R_1\to R_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & -3 & -5 \end{vmatrix} \overset{R_3-3R_2\to R_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 13 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 13 = -13$$

בסוף השתמשנו בתכונה של דטרמיננטה של מטריצה משולשית.

ב. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ תשובה סופית: 56-

פתרון

נבצע דירוג של הדטרמיננטה לפי פעולות שורה:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} \underset{R_3-2R_1\to R_3}{\overset{R_2-3R_1\to R_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & -3 & 11 \end{vmatrix} \underset{(*)}{=} 7\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 11 \end{vmatrix} \overset{R_3-3R_2\to R_3}{=} 7\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 7\cdot 1\cdot(-1)\cdot 8 = -56$$

(*) הוצאת גורם משותף מהשורה השנייה

בסוף משתמשים בתכונה של דטרמיננטה של מטריצה משולשית.