בס"ד

פתרון תרגיל בית – מכפלה פנימית ונורמה

1. נתונים הווקטורים הבאים ב-$\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\ \vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix},\ \vec{w}=\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix}$$

א. חשבו את המכפלות הפנימיות $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle, \langle\vec{u},\vec{w}\rangle, \langle\vec{v},\vec{w}\rangle, \langle(\vec{u}+\vec{v}),\vec{w}\rangle$.

<u>פתרון</u>

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=1\cdot2+2\cdot(-3)+4\cdot5=2-6+20=16$$

$$\langle\vec{u},\vec{w}\rangle=1\cdot4+2\cdot2+4\cdot(-3)=4+4-12=-4$$

$$\langle\vec{v},\vec{w}\rangle=2\cdot4+(-3)\cdot2+5\cdot(-3)=8-6-15=-13$$

נחשב:

$$\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}1+2\\2-3\\4+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\9\end{pmatrix}$$

לכן

$$\langle(\vec{u}+\vec{v}),\vec{w}\rangle=3\cdot4+(-1)\cdot2+9\cdot(-3)=12-2-27=-17$$

ב. חשבו את הנורמות $\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|, \|\vec{w}\|, \|\vec{u}+\vec{v}\|$.

<u>פתרון</u>

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{\langle\vec{u},\vec{u}\rangle}=\sqrt{1^2+2^2+4^2}=\sqrt{21}$$

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{\langle\vec{v},\vec{v}\rangle}=\sqrt{2^2+(-3)^2+5^2}=\sqrt{38}$$

$$\|\vec{w}\|=\sqrt{\langle\vec{w},\vec{w}\rangle}=\sqrt{4^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{29}$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{\langle(\vec{u}+\vec{v}),(\vec{u}+\vec{v})\rangle}=\sqrt{3^2+(-1)^2+9^2}=\sqrt{91}$$

2. נתונים הווקטורים הבאים ב- $\mathbb{C}^4$:

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2+i\\-3\\4-i\end{pmatrix},\ \vec{v}=\begin{pmatrix}3\\4\\-1\\i\end{pmatrix},\ \vec{w}=\begin{pmatrix}3\\-2\\-i\\1\end{pmatrix}$$

א. חשבו את המכפלות הפנימיות $\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$, $\langle\vec{u},\vec{w}\rangle$, $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$.

<u>פתרון</u>

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=1\cdot\underbrace{\overline{3}}_{=3}+(2+i)\cdot\underbrace{\overline{4}}_{=4}+(-3)\cdot\underbrace{\overline{(-1)}}_{=-1}+(4-i)\cdot\underbrace{\overline{i}}_{=-i}=3+8\cancel{+4i}+3\cancel{-4i}+\underbrace{i^2}_{=-1}=13$$

$$\langle\vec{u},\vec{w}\rangle=1\cdot\underbrace{\overline{3}}_{=3}+(2+i)\cdot\underbrace{\overline{(-2)}}_{=-2}+(-3)\cdot\underbrace{\overline{(-i)}}_{=i}+(4-i)\cdot\underbrace{\overline{1}}_{1}=3\cancel{-4}-2i-3i\cancel{+4}-i=3-6i$$

$$\langle\vec{v},\vec{w}\rangle=3\cdot\underbrace{\overline{3}}_{=3}+4\cdot\underbrace{\overline{(-2)}}_{=-2}+(-1)\cdot\underbrace{\overline{(-i)}}_{=i}+i\cdot\underbrace{\overline{1}}_{=1}=9-8\cancel{-i}\cancel{+i}=1$$

ב. חשבו $\|\vec{w}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{u}\|$.

<u>פתרון</u>

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{\langle\vec{u},\vec{u}\rangle}=\sqrt{\sum_{k=1}^{4}|u_k|^2}=\sqrt{\underbrace{|1|^2}_{=1^2=1}+\underbrace{|2+i|^2}_{=2^2+1^2=5}+\underbrace{|-3|^2}_{=3^2=9}+\underbrace{|4-i|^2}_{=4^2+(-1)^2=17}}=\sqrt{31}$$

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{\langle\vec{v},\vec{v}\rangle}=\sqrt{\sum_{k=1}^{4}|v_k|^2}=\sqrt{\underbrace{|3|^2}_{=3^2=9}+\underbrace{|4|^2}_{=4^2=16}+\underbrace{|-1|^2}_{=1^2=1}+\underbrace{|i|^2}_{=1^2=1}}=\sqrt{27}$$

$$\|\vec{w}\|=\sqrt{\langle\vec{w},\vec{w}\rangle}=\sqrt{\sum_{k=1}^{4}|w_k|^2}=\sqrt{\underbrace{|3|^2}_{=3^2=9}+\underbrace{|-2|^2}_{=2^2=4}+\underbrace{|-i|^2}_{=1^2=1}+\underbrace{|1|^2}_{=1^2=1}}=\sqrt{15}$$

3. א. נתונה המכפלה הפנימית הבאה ב- $\mathbb{R}^2$:

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+3x_2y_2$$

כאשר $\vec{v}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \vec{u}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

ונתונים הווקטורים:

$$\vec{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{v}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(i) חשבו את $\langle \vec{u},\vec{v} \rangle$ ואת $\|\vec{v}\|$ לפי המכפלה הפנימית הנתונה.

<u>**פתרון**</u>

בכדי לחשב את $\langle \vec{u},\vec{v} \rangle$ לפי המכפלה הפנימית הנתונה, תחילה נסמן

$$\vec{u}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1=1\,,\ \ x_2=5$$
$$\vec{v}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow y_1=3\,,\ \ y_2=4$$

ונקבל

$$\langle \vec{u},\vec{v} \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 = 1\cdot 3 - 1\cdot 4 - 5\cdot 3 + 3\cdot 5\cdot 4 = 44$$

עבור הנורמה $\|\vec{v}\|$ נקבל

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v},\vec{v} \rangle} = \sqrt{y_1y_1 - y_1y_2 - y_2y_1 + 3y_2y_2} = \sqrt{y_1^2 - 2y_1y_2 + 3y_2^2} = \sqrt{3^2 - 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4^2} = \sqrt{33}$$

(ii) חשבו את $\langle \vec{u},\vec{v} \rangle$ ואת $\|\vec{v}\|$ לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

<u>**פתרון**</u>

לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית נקבל:

$$\langle \vec{u},\vec{v} \rangle = 1\cdot 3 + 5\cdot 4 = 3 + 20 = 23$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v},\vec{v} \rangle} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$

בס"ד

4. בהנתן :

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\vec{v}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

הוכיחו או הפריכו : האם ההגדרות הבאות מהוות מכפלה פנימית ב $\mathbb{R}^3$?

א. $\left\langle\vec{u},\vec{v}\right\rangle=x_1y_1+x_2y_2$

ב. $\left\langle\vec{u},\vec{v}\right\rangle=x_1y_2x_3+y_1x_2y_3$

(במידה ולא יש להראות איזה תנאי לא מתקי'ים, במידה וכן יש להראות קיום של כל אחד מהתנאים).

<u>**פתרון**</u>

א. ההגדרה הנתונה אינה מכפלה פנימית, כיוון שבהגדרת הביטוי $\left\langle\vec{u},\vec{v}\right\rangle=x_1y_1+x_2y_2$ לא מופיעות הקואורדינטות השלישיות של שני הווקטורים,

נקבל למשל עבור הווקטור $\vec{0}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}=\vec{u}$ כי

$$\left\langle\vec{u},\vec{u}\right\rangle=x_1^2+x_2^2=0^2+0^2=0$$

לכן תנאי (4) של המכפלה הפנימית אינו מתקי'ים.

כי מצאנו וקטור שונה מאפס שהמכפלה הפנימית שלו עם עצמו שווה אפס.

ב. גם ההגדרה בסעיף זה אינה מכפלה פנימית.

למשל עבור הווקטור $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ נקבל

$$\left\langle\vec{u},\vec{u}\right\rangle=x_1x_2x_3+x_1x_2x_3=2x_1x_2x_3=2\cdot1\cdot2\cdot(-3)=-12<0$$

בניגוד לתנאי (4) של המכפלה הפנימית.