

# מופשטת 1 – תרגיל בית 11

## שאלה 1

הוכיחו כי לא קיימת חבורה פשוטה מסדר  $p^k(p+1)$  עבור  $p$  ראשוני ו- $k > 0$ .

## שאלה 2

תהי  $G$  חבורה כך ש- $n_p \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ . הראו שקיימות שתי תת חבורות  $p$ -סילו  $P, Q$  המקיימות  $[P: P \cap Q] = [Q: P \cap Q] = p$ .

### הדרכה

נסמן ב- $S$  את אוסף ת"ח  $p$ -סילו של  $G$  (מדוע אוסף זה אינו ריק?).  
תהי  $P$  תת חבורה  $p$ -סילו של  $G$ . התבוננו בפעולה  $P \times S \rightarrow S$  על ידי הצמדה, ונסו לחשב את סדרי המסלולים של פעולה זו.

## שאלה 3

א. נתונות שש חבורות מסדר 40. זהו אילו חבורות איזומורפיות זו לזו:

$$\mathbb{Z}_{40}, \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_5$$

ב. 1. כמה חבורות אבליות מסדר 500 (עד כדי איזומורפיזם) יש?

2. בכמה מהן יש איבר מסדר 4?

3. בכמה מהן יש איבר מסדר 20?

ג. מצאו מספר חבורות אבליות (עד כדי איזומורפיזם) מסדר 3600. בכמה

מהן יש תת-חבורה 5-סילו ציקלית?

ד. מצאו את  $\exp(S_3), \exp(S_5)$ .

## שאלה 4

א. מצאו כמה איברים מכל סדר יש בחבורות

$$\mathbb{Z}_{p^3}, \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$$

ב. הוכיחו שבחבורת  $p$  אבליית לא ציקלית יש תת חבורה מסדר  $p^2$  שאינה ציקלית.

### שאלה 5

האם קיימת חבורה אבליית  $G$ , כך ש-  $\exp(G) = 4$ ,  $|G| = 32$ , ו-  $[G:G^2] = 4$ ?

### שאלה 6

מצאו איזומורפיזם מפורש מ-  $A = \mathbb{Z}_{77} \times \mathbb{Z}_5$  ל-  $B = \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{35}$ .

**בהצלחה!**