

פתרון תרגיל בית 1

שאלה 1

עבור הפונקציות הבאות מצא פיתוח מקלורן עד לסדר 3.

א. $f(x) = \tan x$

ב. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

ג. $f(x) = \ln(x + e)$

פתרון שאלה 1

סעיף א

נחשב את $f(0), f'(0), f''(0), f^{(3)}(0)$

$f(0) = 0 \Leftarrow f(x) = \tan x$

$f'(0) = 1 \Leftarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

$f''(0) = 0 \Leftarrow f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} \Leftarrow f''(x) = 2 \sin x (\cos x)^{-3} \Leftarrow f'(x) = (\cos x)^{-2}$

$f^{(3)}(x) = 2 \Leftarrow f^{(3)}(x) = \frac{2 \cos x \cdot \cos^3 x - 2 \sin x \cdot 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x)}{\cos^6 x} \Leftarrow f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$

הפולינום המבוקש הוא $P_3(x) = x + \frac{x^3}{3}$

סעיף ב

נחשב את $f(0), f'(0), f''(0), f^{(3)}(0)$

$f(0) = 1 \Leftarrow f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

$f'(0) = 0 \Leftarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$f''(0) = 1 \Leftarrow f''(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} \Leftarrow f''(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} \Leftarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

הפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ היא פונקציה זוגית, ולכן $f^{(3)}(0) = 0$

הפולינום המבוקש הוא: $P_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$

סעיף ג

נחשב את $f(0), f'(0), f''(0), f^{(3)}(0)$

$f(0) = 1 \Leftarrow f(x) = \ln(x + e)$

$f'(0) = \frac{1}{e} \Leftarrow f'(x) = \frac{1}{x + e}$

$f''(0) = \frac{-1}{e^2} \Leftarrow f''(x) = \frac{-1}{(x + e)^2}$

$f^{(3)}(0) = \frac{2}{e^3} \Leftarrow f^{(3)}(x) = \frac{2}{(x + e)^3}$

הפולינום המבוקש הוא: $P_3(x) = 1 + \frac{x}{e} - \frac{x^2}{2e^2} + \frac{x^3}{3e^3}$

שאלה 2

היעזר בפיתוח לפולינום מקלורן של הפונקציות $e^x, \sin x, \cos x$ ומצא פיתוח עד לסדר 9 של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = xe^{x^2}$

ב. $f(x) = x^2 \sin x$

ג. $f(x) = \sin^2 x$

פתרון שאלה 2

סעיף א

ראינו בשיעור שהפיתוח של הפונקציה e^x הוא $P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$

הפיתוח של e^{x^2} הוא $P_8(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}$

סה"כ נקבל שהפיתוח של $f(x) = xe^{x^2}$ הוא $P_9(x) = x + x^3 + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \frac{x^9}{4!}$

סעיף ב

ראינו בשיעור שהפיתוח של $\sin x$ הוא $P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$

סה"כ נקבל שהפיתוח של $f(x) = x^2 \sin x$ הוא $P_9(x) = x^3 - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^7}{5!} - \frac{x^9}{7!}$

סעיף ג

נשתמש בזהות $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\alpha)$

יש למצוא פיתוח של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$

ראינו בשיעור שהפיתוח של $\cos x$ הוא $P_8(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$

סה"כ נקבל שהפיתוח של $f(x) = \sin^2 x$ הוא

$$P_8(x) = -\frac{1}{2} + 2x^2 - \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^6}{45} - \frac{2x^8}{315} \Leftrightarrow P_8(x) = \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \frac{(2x)^8}{8!} \right)$$

שאלה 3

עבור הפונקציות הבאות מצא פיתוח טיילור מסדר 3 סביב הנקודה הנתונה.

א. $x_0 = 1 \quad f(x) = \ln x$

ב. $x_0 = 1 \quad f(x) = \frac{1}{x}$

ג. $x_0 = 8 \quad f(x) = \sqrt[3]{x}$

פתרון שאלה 3

סעיף א

נחשב את $f(1), f'(1), f''(1), f^{(3)}(1)$

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \ln x$$

$$f'(1) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = \ln x$$

$$f''(1) = -1 \Leftrightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f^{(3)}(1) = 2 \Leftrightarrow f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3} \Leftrightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$P_3(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$$

סעיף ב

נחשב את $f(1), f'(1), f''(1), f^{(3)}(1)$

$$f(1) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(1) = -1 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(1) = 2 \Leftrightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3} \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f^{(3)}(1) = -6 \Leftrightarrow f^{(3)}(x) = \frac{-6}{x^4} \Leftrightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$P_3(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3$$

סעיף ג

נחשב את $f(8), f'(8), f''(8), f^{(3)}(8)$

$$f(8) = 2 \Leftrightarrow f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(8) = \frac{1}{12} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2 \cdot 3x^{\frac{2}{3}}}$$

$$f''(8) = \frac{-1}{144} \Leftrightarrow f''(x) = \frac{-2}{5 \cdot 9x^{\frac{5}{3}}}$$

$$f^{(3)}(8) = \frac{5}{3456} \Leftrightarrow f^{(3)}(x) = \frac{10}{8 \cdot 27x^{\frac{8}{3}}}$$

$$P_3(x) = 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{144}(x-8)^2 + \frac{5}{3456}(x-8)^3$$

שאלה 4

בעזרת פיתוח פונקציות לטור טיילור חשב את המספרים הבאים עד לקירוב של 0.01. (היעזר בשארית לגראנז' כדי לקבוע מהו סדר של הפולינום שיש לפתח כדי לקבל את הקירוב הדרוש)

א. $\sin 1$

ב. $\sqrt[3]{9}$

פתרון שאלה 4

משפט לגראנז'

נניח ש $P_n(x)$ פולינום טיילור מסדר n של פונקציה $f(x)$ בנקודה a אז קיימת נקודה $a < c < x$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

כך ש

סעיף א

נחשב את שארית לגראנז' $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^n$, מכיוון שמדובר בפולינום מקלורן נקבל ש

$$|R_n(1)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (1-a)^n \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \quad \text{לכל } 0 < c < 1 \text{ ש } |f^{(n+1)}(c)| \leq 1$$

$a = 0$. נשים לב ש $\frac{1}{100} < \frac{1}{5!} < \frac{1}{120}$ ולכן $5! = 120$ נשים לב ש

מספיק לחשב את פולינום מקלורן עד לסדר 4 מכיוון ש $f^{(4)}(x) = 0$ נחשב את פולינום מקלורן מסדר 5.

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

ראינו בשיעור שהפיתוח של $\sin x$ הוא

$$P_5(1) = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = \frac{101}{120} = 0.84166666\dots$$

$$\sin 1 = 0.8414709\dots$$

סעיף ב

נחשב את שארית לגראנז' $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^n$, מכיוון שמדובר בפולינום טיילור סביב

$$x_0 = 8 \text{ נקבל ש } a = 8 \text{ כאשר } R_n(9) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (9-8)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \quad 8 < c < 9$$

$$R_1(9) = \frac{f''(c)}{2!} = \left| \frac{-2}{9 \cdot c^3 \cdot 2!} \right| \leq \frac{1}{9 \cdot 8^3} = \frac{1}{288}$$

הדיוק הדרוש הוא $\frac{1}{100}$.

$$P_1(x) = 2 + \frac{1}{12}(x-8) = \frac{1}{12}x + \frac{4}{3}$$

נשים לב: $P_1(9) = 2.083333\dots$, $\sqrt[3]{9} = 2.08008\dots$

אכן השגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$.