תרגיל בית 2 מבוא לתורת החבורות
88-211 סמסטר א' תשע"ח

שאלה 1. יהיו n,m מספרים שלמים, ונניח $n|m$. האם בהכרח $n|-m$? האם בהכרח $-n|2m$? האם בהכרח $m\nmid n$ (כלומר m לא מחלק את n)?

שאלה 2. יהי p מספר ראשוני. מצאו את כל המספרים $x\in\mathbb{Z}$ כך ש-$x|p$.

שאלה 3. יהי n מספר טבעי. הגדרנו יחס על $\mathbb{Z}$ לפיו נאמר כי $a,b\in\mathbb{Z}$ *שקולים מודולו* n אם $n|a-b$, וסימנו יחס זה כ-$a\equiv b \mod n$. הוכיחו כי שקילות מודולו n היא אכן יחס שקילות (כלומר יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי).

שאלות רגילות

שאלה 4. יהי n מספר טבעי. נסמן את הכפולות שלו ב-$n\mathbb{Z}=\{0,\pm n,\pm 2n,\dots\}$. למשל $4\mathbb{Z}=\{\dots,-12,-8,-4,0,4,8,12,\dots\}$. נזכיר כי סימנו $\gcd(a,b)=(a,b)$.

א. הוכיחו כי b מחלק את a אם ורק אם $a\mathbb{Z}\subseteq b\mathbb{Z}$.

ב. נגדיר סכום על קבוצות כאלו לפי $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=\{\alpha+\beta:\alpha\in a\mathbb{Z},\beta\in b\mathbb{Z}\}$. הוכיחו כי מתקיים $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=(a,b)\mathbb{Z}$.

ג. הוכיחו כי $((a,b)\cdot(a,c))\mathbb{Z}\subseteq a\mathbb{Z}+bc\mathbb{Z}$. רמז: העזרו בסעיפים הקודמים.

שאלה 5. הוכיחו כי לכל $a,n,m\in\mathbb{Z}$ מתקיים $(an,am)=|a|\,(n,m)$.

שאלה 6. מצאו בעזרת אלגוריתם אוקלידס את הממ"מ הבאים:

א. $(88,211)$

ב. $(-26400,63300)$, רמז: העזרו בשאלה הקודמת.

שאלה 7. יהיו n,m מספרים שלמים. *הכפולה המשותפת המזערית* (כמ"מ, least common multiple) שלהם מוגדרת להיות

$$\text{lcm}(n,m) = [n,m] = \min\{d \in \mathbb{N} : n|d \wedge m|d\}$$

למשל $[6,10] = 30$ ו-$[2,5] = 10$. הוכיחו:

א. אם $m|a$ וגם $n|a$, אז $[n,m]\,|a$.

ב. $|nm| = (n,m)\,[n,m]$. למשל $6 \cdot 4 = 24 = 12 \cdot 2 = (6,4)\,[6,4]$.

שאלה 8. הוכיחו:

א. לכל n שלם מתקיים $(4n+3, 7n+5) = 1$.

ב. מצאו $s,t \in \mathbb{Z}$ (התלויים ב-n) כך ש-$(4n+3)s + (7n+5)t = 1$.

שאלה 9. מצאו את כל המספרים השלמים n כך ש-$(n+1)|(n^2+11)$.

בהצלחה!