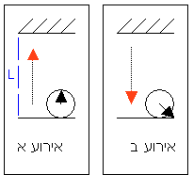
מבוא לפיסיקה מודרנית – תרגול III

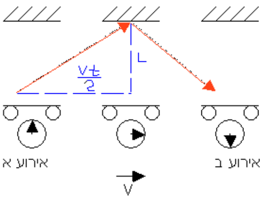
היום נדבר על תופעות שונות ומוזרות שנובעות מטרנספורמציית לורנץ וקצת יותר קשות להבנה מבחינה אינטואיטיבת.

1. התכווצות המרחק: נניח שיש לנו סרגל באורך L_0 במערכת O' כך ש $L_0 = X_2 - X_1$. כעת נביט על אורך הסרגל במערכת O.
ע"פ טרנספורמציית לורנץ $\begin{matrix} x'_2=\gamma(x_2-vt_2) \\ x'_1=\gamma(x_1-vt_1) \end{matrix}$ ונקבל $x'_2 - x'_1 = \gamma\big((x_2-x_1) - v(t_2-t_1)\big) = \gamma(x_2-x_1)$ ולכן $L = \frac{L_0}{\gamma}$.
ולכן $L < L_0$.
דוגמה: מוט שאורכו $1m$. נע במהירות $0.9C$ ביחס לארץ. מה יהיה האורך של המוט שימדד מהארץ?
פתרון: נציב בנוסחא שפיתחנו להתכווצות המרחק, ונקבל $L = L_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = 1\sqrt{1-0.9^2} = 0.436m$.

2. התארכות הזמן: בתמונה משמאל מדובר באליס שיושבת בתוך רכבת ומסתכלת על אור שמוחזר והלך מעלה ומטה בתוך הרכבת. בשרטוט מימין מתוארת תנועת האור מנקודת מבטו של בוב, החיצוני לרכבת.
הרכבת נעה במהירות V ומהירות האור היא C. נניח כי ע"פ אליס, הזמן שלוקח לאור לעלות ולרדת הוא $\Delta t_0 = \frac{2L}{C}$. לפי בוב מתקיים כי (ע"פ פיתגורס) ל- $\Delta t' = \frac{2\sqrt{L^2 + \frac{v^2\Delta t'^2}{4}}}{C}$ נעלה בריבוע את שתי האגפים, נקבל



מדידה ראשונה
האירועים בה באותו מקום



מדידה שנייה
האירועים בה במקומות שונים

$\Delta t'^2 = \frac{4}{c^2}\left(L^2 + \frac{v^2\Delta t'^2}{4}\right) = \frac{4L^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\Delta t'^2 \rightarrow \Delta t'^2\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = \frac{4L^2}{c^2} = \Delta t_0^2$ נבודד ונקבל $\Delta t' = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$
נניח שהיא נעה ב $100\frac{m}{s}$. ושלוקח לה שניה אחת לעבור את המרחק במערכת היחוס של אליס. נקבל כי $\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{100}{3\times10^8}\right)^2}}$

דוגמה: באיזה מהירות ביחס לכדור הארץ לנוע חללית כדי שהשעון שנמצא בה יפגר בשניה אחת כל יום.

פתרון: מספר השניות בכדור הארץ בכל יום הוא $86{,}400\ sec$. ובחללית צריך להיות לנו $86{,}401\ sec$. נציב בנוסחה שלנו $\gamma = \frac{\Delta t'}{\Delta t_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 1 + \frac{1}{86400}$. לכן $1-\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{86400}{86401}$ ואז $\frac{v}{c} = \sqrt{1-\frac{86{,}400}{86{,}401}}$. ולכן $v = 1{,}020{,}614.82\frac{m}{s}$

3. סימולטניות של מאורעות: צופה O רואה שתי מאורעות (ברק פוגע בעץ) מתרחשים. מה צריכה להיות המהירות של o' ביחס לO בשביל לראות את האירועים סימולטנית?

דוגמה: הבאטמוביל (=המכונית של באטמן) יש לה אורך עצמי של חמש מטר. היא נעה במהירות 0.8c. המכונית נוסעת לתוך מוסך שהמרחק העצמי שלו (בין דלת הכניסה ליציאה) הוא 4 מטר. אלפרד נמצא ליד המוסך מתכוון לסגור בו"ז לרגע קצר האם תספיק המכונית כולה להיכנס או שהיא תחתך בחלקה האחורי?

פתרון: נגדיר את אלפרד להיות O. לפי אלפרד, האורך של הבאטמוביל מתכווץ להיות $L = L_0\sqrt{1-0.8^2} = 3m$. לכן לפי אלפרד הבאטמוביל עובר את המוסך יפה מאוד ☺
כעת, לפי באטמן (o'), המכונית נשארת חמש מטר, איך הוא יעבור את המוסך? לפיו, המוסך גם כן מתכווץ לאורך חדש $L = 4\sqrt{1-0.8^2} = 2.4m$. הדבר שיפתור לנו כאן את הבעיה זה הסימולטניות של המאורעות. זה שאלפרד סוגר את הדלתות באותו רגע לא בהכרח אומר שהן נסגרות באותו רגע לפי באטמן. $t_2 - t_1 = \frac{(t'_2-t'_1)+\frac{v}{c^2}(x'_2-x'_1)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$. לפי אלפרד, הפרש הזמנים הוא 0, לפי באטמן, לעומת זאת, הפרש הזמנים הוא $\Delta t' = \frac{v}{x^2}(-\Delta x') = -\frac{0.8c}{c^2}5 = -1.33\times10^{-8}sec$ ובגלל שמדובר בערך שלילי, הדלת יציאה נסגרת אחרי שהדלת כניסה נסגרת, ובאטמן מספיק לצאת בדיוק באותו זמן. באטמן חי!
המרחק שהוא עובר זה $x = 0.8\times3\times10^8\times1.333\times10^{-8} = 3.2m$.