1. תזכורת: פונקצית האקספוננט המרוכבת מגודרת להיות

$$e^{x+iy}=e^x\text{cis}(y)$$

והיא מקיימת כי

- היא רציפה
- היא גזירה ומתקיים $(e^z)'=e^z$
- (חיבור מעריכים): $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$
- היא מזדהה עם פונקצית האקספוננט הממשית על ערכים ממשיים.

2. תכונות:

(א) $|e^z|=e^{Re(z)}$ (בכתיב אחר: $\left|e^{x+iy}\right|=e^x$). למשל $\left|e^{8+2i}\right|=e^8$
הוכחה: בהרצאה הקודמת.

(ב) לכל מספר מרוכב z מתקיים $e^z\neq 0$
הוכחה: מהתכונה הקודמת, כיוון ש $|e^z|=e^{Re(z)}\neq 0$ נקבל ש $e^z\neq 0$ (אפס הוא המספר היחידי שהנורמה שלו שווה לאפס).
הערה: ייתכן ש e^z יהיה שווה למספר ממשי שלילי. למשל

$$e^{8+i\pi}=e^8\text{cis}(\pi)=-e^8$$

(ג) ההופכי של e^z הוא e^{-z}.
הוכחה: לפי תכונת חיבור מעריכים נקבל ש

$$e^ze^{-z}=e^{z-z}=e^0=1$$

למשל

$$e^{8-2i}e^{-8+2i}=1$$

כלומר $\left(e^{8-2i}\right)^{-1}=e^{-8+2i}$.

(ד) לכל n טבעי $\left(e^z\right)^n=e^{zn}$. הוכחה: ע"י חיבור מעריכים.

$$\left(e^z\right)^n=e^ze^z\cdots e^z=e^{z+z+\cdots+z}=e^{nz}$$

(ה) $e^{i\pi}+1=0$ (או $e^{i\pi}=-1$)
הוכחה: חישוב ישיר

$$e^{i\pi}=e^{0+i\pi}=e^0\text{cis}\left(\pi\right)=1\cdot(-1)=-1$$

(ו) פונקציה האקספוננט המרוכבת היא מחזורית $2\pi i$, כלומר $e^z=e^{z+2\pi i}$ (ולכן גם $e^z=e^{z+2\pi ni}$)
למשל

$$e^{8+2i}=e^{8+2i+2\pi i}=e^{8+2i+2\pi i+2\pi i}$$

הוכחה: נסמן $z=x+yi$

$$e^{z+2\pi i}=e^{x+yi+2\pi i}=e^{x+(y+2\pi)i}=e^x\text{cis}\left(y+2\pi\right)=e^x\text{cis}\left(y\right)=e^{x+yi}=e^z$$

(ז) (זהות ארגוב ושות') מתקיים ש $e^{z+\pi i}=-e^z$

$$e^{z+\pi i}=e^{x+yi+\pi i}=e^{x+(y+\pi)i}=e^x\text{cis}\left(y+\pi\right)=e^x\left[-\text{cis}\left(y\right)\right]=-e^x\text{cis}\left(y\right)=-e^{x+yi}=-e^z$$

(ח) פונקציה האקספוננט המרוכבת אינה חח"ע.
הוכחה: למשל

$$e^8 = e^{8+2\pi i}$$

(ט) פונקציה האקספוננט המרוכבת כמעט על (לכל מספר, פרט לאפס, יש מקור). במדויק: לכל $w \neq 0$ מרוכב, קיים z מרוכב כך ש $e^z = w$.
נתחיל עם דוגמה: למספר $2+i = \sqrt{5}\text{cis}(0.463)$ יש מקור. כלומר קיים z מרוכב כך ש $e^z = 2+i$.

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \text{cis}(y) = \sqrt{5}\text{cis}(0.463)$$

נגדיר $z = \ln(\sqrt{5}) + 0.463i$ ואז

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \text{cis}(y) = e^{\ln(\sqrt{5})}\text{cis}(0.463) = \sqrt{5}\text{cis}(0.463) = 2+i$$

הוכחה: יהא $0 \neq w = r\text{cis}(\theta)$ (ולכן $r > 0$) נגדיר $z = \ln(r) + \theta i$ ואז

$$e^z = e^{\ln(r)+\theta i} = e^{\ln(r)}\text{cis}(\theta) = r\text{cis}(\theta)$$

הערה: כמובן שגם $\ln(r) + \theta i + 2\pi k i$ הוא מקור.
הערה: אם $e^{z_1} = e^{z_2}$ אזי ההפרש $z_1 - z_2$ שווה ל $2\pi k i$.

3. הרחבה של $\sin, \cos$ הממשיות ל $\sin, \cos$ המרוכבות: הגדרה

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

4. תכונות:

(א) $\sin, \cos$ המרוכבות מרחיבות את אלו הממשיות.
(ב) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
(ג) $\sin'(z) = \cos(z)$
(ד) $\cos'(z) = -\sin z$
(ה) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$
(ו) $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$
(ז) $\cos z = \sin(\frac{\pi}{2} - z)$
(ח) $\sin z = 0 \iff z = n\pi$
(ט) $\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + nz \cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + nz$
(י) $\cos, \sin$ מחזוריות עם מחזור 2π.
(יא) $\cos$ פונקציה זוגית, $\sin$ פונקציה אי זוגית.
(יב) לא מתקיים $|\cos z| \leq 1, |\sin z| \leq 1$

5. תזכורת

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$