שיעור חזרה

תרגיל. תהא $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית שיש לה איבר חיובי על האלכסון (כלומר קיים i כך ש $A_{i,i}>0$). הוכיחו כי ל A יש ע"ע חיובי.

פתרון. נסמן $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ את הע"ע של A. כיוון ש A סימטרית קיימת P או"ג כך ש

$$A=P^tDP$$

כעת

$$0<A_{i,i}=e_i^tAe_i=e_i^t\left(P^tDP\right)e_i\overset{v=Pe_i}{=}v^tDv=\sum_{i,j}D_{i,j}v_iv_j=\sum_{i=1}^{n}D_{i,i}v_i^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_iv_i^2$$

תרגיל. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית הוכיחו ש- $[Im\left(T\right)]^{\perp}=Ker\left(T^{*}\right)$

נכון/לא נכון.

תרגיל 1. תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה, אז A^t גם כן לכסינה.

פתרון. נכון,

$$A^t=\left(P^{-1}DP\right)^t=P^tD^t\left(P^{-1}\right)^t\underset{Q^{-1}=P^t}{=}Q^{-1}DQ$$

לכן A^tלכסינה.

תרגיל 2. תהי $T:\underset{E}{V}\to\underset{F}{W}$ ה"ל ב-E,F בסיסים ל-V,W בהתאמה, אז $ker\left(T\right)=N\left([T]_F^E\right)$

פתרון. לא נכון, מתקיים

$$[ker\left(T\right)]_E=N\left([T]_F^E\right)$$

ואם E אינו הבסיס הסטנדרטי אז זה לא נכון.

תרגיל 3. תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, אם A לכסינה אז A הפיכה.

פתרון. לא נכון, $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ היא אלכסונית ולכן גם לכסינה, אך אינה הפיכה

תרגיל 4. תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, אם A הפיכה אז A לכסינה.

פתרון. לא נכון, $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ היא הפיכה ($|A|=1$), אך היא בלוק זורדן $J_2\left(1\right)$ ולכן לא לכסינה.

תרגיל 5. תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ו-$\lambda_1,...,\lambda_k$ הם הע"ע של A אז $|A|=\prod_{i=1}^{k}\lambda_i$ נכון רק כאשר יש n ע"ע)

פתרון. לא נכון, למשל $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-2\\0&2&0\end{pmatrix}$, $|A|=4$ אך העע היחיד של A הוא $\lambda=1$.
הטענה נכונה רק כאשר מספר הע"ע של A שווה לסדר של המטריצה כלומר $k=n$.

תרגיל 6. אם A ניתנת ללכסון אז $rank\left(A\right)=rank\left(A^2\right)$

פתרון. נכון

$$rank\left(A^2\right)=rank\left(P^{-1}D^2P\right)=rank\left(D^2\right)=rank\left(D\right)$$

בעוד ש-

$$rank\left(A\right)=rank\left(P^{-1}DP\right)=rank\left(D\right)$$

תרגיל 7. אם $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכה, אז ניתן לרשום את A^{-1} כפולינום של A עם מקדמים ממשיים?

תרגיל. נכון, לפי משפט קיילי המילטון מתקיים $P_A\left(A\right)=0$ נניח ש-

$$P_A\left(\lambda\right)=\sum_{i=0}^{n}a_i\lambda^i$$

כאשר $a_0\neq0$ כיוון ש-A הפיכה לכן

$$\begin{gathered}0=P_A\left(A\right)=a_0I+\sum_{i=1}^{n}a_iA^i\\\Downarrow\\-a_0I=A\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda^{i-1}\\\Downarrow\\I=A\sum_{i=1}^{n}-\frac{a_i}{a_0}\lambda^{i-1}\\\Downarrow\\A^{-1}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_0}\lambda^{i-1}\end{gathered}$$

תרגיל 8. אם $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ לכסינות אז AB לכסינה?

פתרון. לא נכון, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ לכסינות, אך $AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ אינה לכסינה (צורת זורדן).

תרגיל 9. אם $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש-AB לכסינה אז אחת מהמטריצות A,B חייבת להיות לכסינה?

פתרון. לא נכון, $A=B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, לא לכסינות, אבל $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ לכסינה.

תרגיל 10. אם $\{v,w\}$ אורתונורמלית אז $\frac{1}{7}\left(3v+4w\right)$ הוא ווקטור היחידה?

פתרון. נבדוק

$$\left\|\frac{1}{7}\left(3v+4w\right)\right\|^2=\left\langle\frac{1}{7}\left(3v+4w\right),\frac{1}{7}\left(3v+4w\right)\right\rangle=\frac{1}{49}\left(9\left\|v\right\|+16\left\|w\right\|\right)=\frac{25}{49}$$

לכן

$$\left\|\frac{1}{7}\left(3v+4w\right)\right\|=\frac{5}{7}$$

כלומר הוא לא ווקטור היחידה

תרגיל 11. יהיו $v, w \in \mathbb{R}^n$ אז $(v+w) \perp (v-w)$ אם ורק אם $\|w\| = \|v\|$

פתרון. אם נתון $(v+w) \perp (v-w)$ אז

$$0 = \langle v-w, v+w\rangle = \|v\|^2 - \|w\|^2$$
$$\Downarrow$$
$$\|v\|^2 = \|w\|^2$$

אם נתון ש-$\|w\| = \|v\|$ אז

$$\langle v-w, v+w\rangle = \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle -w, v\rangle + \langle -w, w\rangle = \langle v, w\rangle - \langle w, v\rangle = \langle v, w\rangle - \overline{\langle v, w\rangle} = 0$$