בס"ד

תרגול 4
21/03/16

תזכורות

משפט ההתאמה:

$I \triangleleft R$

כל אידיאל של R/I הוא J/I כך ש- $I \subseteq J$. $J \triangleleft R$.

שומרת על הכלה והכלה ממש ועל סוג הדבר בקרוב.

משפט האיזומורפיזם הראשון: $\varphi: R \to S$ $R/\ker\varphi \cong Im\varphi$ ואם φ על: $R/\ker\varphi \cong S$

דוגמא: אפימורפיזם ההצבה $\varphi_0: R[x] \to R$, $x \mapsto 0$ נותן $R[x]/\langle x\rangle \cong R$

נוכיח ש- $\ker\varphi_0 = \langle x \rangle$

$\ker\varphi_0 = \{p(x) \in R[x] \mid \varphi_0(p) = p(0) = 0\}$

$= \{a_0 + a_1x + \dots a_nx^n \mid a_0 = 0\} = \{a_1x + \dots a_nx^n \mid \dots\}$

$= \{(a_1 + \dots a_nx^{n-1})x \mid \dots\} = \langle x \rangle$

הכללה: $c \in Z(R)$: $\varphi_c: R[x] \to R$, $x \mapsto c$ $\ker\varphi = \langle x - c \rangle$

דוגמא: $\varphi_0: R[x,y] \to R[y]$

$R[x,y]/\langle x \rangle \cong R[y]$

דוגמא: $S \subseteq R$ תת-חוג ו- $a \in C_R(S)$

קבוצת איברי R שמתחלפים עם כל איברי S

$S[x] \to S[a]$, $x \mapsto a$

תרגיל: $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 3 \rangle \cong \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$

~~$\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 3 \rangle$~~

תזכורת: חוג קומוטטיבי - $\langle x \rangle = RxR = xR$

תזכ':

משפטי האיזומורפיזם ה-II וה-III:

(II) $S\subseteq R$ תת-חוג, $I\lhd R$ אידיאל

$$S+I/I \cong S/S\cap I$$

(III) $A,B\lhd R$, $A\subseteq B$

$$\frac{R/B}{A/B}\cong R/A$$

דוגמאות:

$$\frac{\gcd(n,m)\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$$ - אידיאל שנוצר ע"י $\gcd(n,m)$

$$\gcd(n,m)\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\cong n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\overset{II}{\cong} m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\cap m\mathbb{Z}\cong m\mathbb{Z}/\mathrm{lcm}(n,m)\mathbb{Z}$$

נשווה עוצמות:

$$\gcd\cdot \mathrm{lcm}=n\cdot m$$

דוגמה: בכללי $\leftarrow$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z}\overset{III}{\cong}\frac{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}\cong\frac{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}{n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})}$$

דוגמה:

$$\mathbb{Z}[x]/\langle 7,x^2-2\rangle\overset{III}{\cong}\frac{\mathbb{Z}[x]/\langle 7\rangle}{\langle 7,x^2-2\rangle/\langle 7\rangle}\cong\mathbb{Z}_7[x]/\langle x^2-2\rangle\cong\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$$

ב-$\mathbb{Z}_7$ יש ל-x^2-2 פתרונות $\bar{x}\to 4$

אידיאלים מקסימליים

הגדרה- אידיאל $M\lhd R$ מקסימלי אם הוא מקסימלי

(1) $M\neq R$ (אמיתי).

(2) $M\subseteq J\underset{\neq}{\lhd} R$ אז $M=J$

דוג

דוגמאות:

(1) ב- $\mathbb{Z}$ $p\mathbb{Z}$ כש-p מספר ראשוני.

(2) ב- $\mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$ האידאלים הם (לפי משפט ההתאמה) מהצורה -
$k\mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$ כאשר $k|45$

ולכן המקסימליים $5\mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$. $\boxed{\text{(ראשוניים מהמספרים שמחלקים את 45.)}}$

(3) יהי R ~~תחום שלמות~~ $\langle x\rangle \triangleleft R[x,y]$
הוא לא מקסימלי

$\langle x\rangle \subsetneq J = \{f(x,y) \mid f(0,0)=0\} \rightarrow$ זה גרעין של ההומומורפיזם $x\to 0$
$y\to 0$

$J \underset{\neq}{\triangleleft} R[x,y]$
הפונקציה הקבועה לא נמצאת באידאל J ולכן זה מוכל ממש.

(4) ב- $F[x]$ (F שדה) (כל אידאל שם הוא מהצורה $\langle x^t\rangle$)
ולכן ברור שהמקסימלי הוא $\langle x\rangle$.

תרגיל: יהי $\varphi: R\to S$ אפימורפיזם ויהי $M\triangleleft S$ אידאל מקסימלי
הוכיחו כי $\varphi^{-1}(M)$ הוא אידאל מקסימלי.

תזכורת: כדאי להשתמש לשם העובדות הבאות:
- אם $\varphi: R\to S$ הומומורפיזם, $J\triangleleft S$ אז $\varphi^{-1}(J)\triangleleft R$.
- אם $\varphi: R\to S$ אפימורפיזם $I\triangleleft R$ אז $\varphi(I)\triangleleft S$

נניח בשלילה ש- $\varphi^{-1}(M) \subsetneq J \subsetneq R$ ונפעיל את φ ונקבל-

$M\subset \varphi(J)\triangleleft S$
φ אפימורפיזם.

אבל M מקסימלי ולכן-

$\varphi(J)=S=\varphi(R)$
ולכן לכל $r\in R$ יש $j\in R$ כך ש- $\varphi(r)=\varphi(j)$

$\varphi(r-j)=0\in M$.

המשך

$r-j \in \varphi^{-1}(M) \subset J$

ולכן - $r=(\underset{\in J}{r-j})+\underset{\in J}{j} \in J$

קיבלנו $R=J$ סתירה!

משל.

• מה לגבי תמונה של אידאל מקסימלי? (באפימורפיזם)

דוגמא: $f:\mathbb{Z}\to \mathbb{Z}/_{8\mathbb{Z}}$ הטלה.

$3\mathbb{Z}$ הוא אידאל מקסימלי ב- $\mathbb{Z}$ אבל התמונה שלו-

$f(3\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$

טענה: יהי $\varphi: R \twoheadrightarrow S$ אפימורפיזם $M \lhd R$ מקסימלי

$\ker\varphi \subseteq M$

אזי: $\varphi(M)$ מקסימלי.

הוכחה: ~~נניח בשלילה ש-~~ ~~$\varphi(M) \subsetneq J \lhd S$~~

לפי משפט האיזומורפיזם ה-I: $S \cong R/_{\ker\varphi}$

ולכן אפשר להחליף את φ בהטלה $\varphi: R \to R/_{\ker\varphi}$

$r \to r+\ker\varphi$

נניח בשלילה ש- $M/_{\ker\varphi} = \varphi(M) \subsetneq J \underset{\neq}{\lhd} R/_{\ker\varphi}$.

לפי משפט ההתאמה $J = J'/_{\ker\varphi}$ עבור $\ker\varphi \subseteq J' \lhd R$

אז יש לנו $M/_{\ker\varphi} \subsetneq J'/_{\ker\varphi}$ ובגלל שמשפט ההתאמה

שומר על הכלות ועל הכלות ממש ולכן - $M \subsetneq J' \subsetneq R$

↓

סתירה!

$\left(J ; R/_{\ker\varphi} \to S \right)$

הנחנו ש- M מקסימלי.

משל

רגע

משפט: R חוג $M \trianglelefteq R$

M אידיאל מקסימלי $\Longleftrightarrow$ R/M פשוט.

אם: R קומוטטיבי

M מקסימלי $\Longleftrightarrow$ R/M שדה.

דוגמאות:

(1) $p\mathbb{Z}$ - כי $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ שדה.

(2) $\langle x\rangle \trianglelefteq F[x]$ מקסימלי כי $F[x]/\langle x\rangle \cong \underset{\text{שדה}}{F}$

(3) $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle = \mathbb{C}$ ולכן $\langle x^2+1\rangle \trianglelefteq \mathbb{R}[x]$ מקסימלי.

(4) $\langle x\rangle \trianglelefteq \mathbb{Z}[x]$ $\qquad$ $\mathbb{Z}[x]/\langle x\rangle \cong \underset{\text{לא שדה!}}{\mathbb{Z}}$

(5) $C(\mathbb{R})$ חוג כל הפונקציות הממשיות הרציפות - חוג ביחס לחיבור וכפל פונקציות.

$M=\{f\in C(\mathbb{R}) \mid f(0)=0\} \trianglelefteq C(\mathbb{R})$ (לבדוק!)

(שכן אידיאל אמיתי)

↓

(פונקציה קבועה 1 אינה בו, אמיתי)

נראה שהוא מקסימלי (החוג קומוטטיבי): נראה ש- $C(\mathbb{R})/M$ הוא שדה.

ניקח $0 \neq f(x)+M \in C/M$

$f(x)\notin M \Longrightarrow f(0)\neq 0$

תמיד קיים בה - $g(x)=f(x)-f(0) \in M$.

$f(x)+M = \underset{\text{פונקציה קבועה}}{f(0)}+M$

ו- $f(0)+M$ הפיך (כי $f(0)\neq 0$ ולכן $\frac{1}{f(0)}+M$ הוא ההופכי)

ורואים שכל איבר $\neq 0$ הפיך

(במובן ש שנמצא מחוץ ל-M הפיך)

מש"ל

אידמפוטנט. תזכורת 207

2 הגדרות

חוגים מקומיים – קומוטטיבי + אידיאל מקסימלי יחיד.

משפט: התנאים השקולים לחוג R קומוטטיבי:

(1) R מקומי

(2) $a+b=1 \Leftarrow$ a הפיך או b הפיך.

(3) אוסף כל הלא-הפיכים (אי-הפיכים) הוא אידיאל.

מסקנה: (2) אם R מקומי, לכל $x\in R$ x הפיך או $1-x$ הפיך.

מסקנה: החוג מקומי אין אידמפוטנטים.
כי $e=e^2 \Rightarrow e(1-e)=0 \Rightarrow$ e ו-$1-e$ לא הפיכים?
(מחלק אפס).

דוגמה: $F[x]/\langle x^t\rangle$ חוג מקומי. $\langle \bar{x}\rangle$ האידיאל המקסימלי היחיד.
$\bar{x}$ לא הפיך כי הוא מחלק אפס ($\bar{x}\cdot\bar{x}^{t-1}=0$) ולכן לא.
המשלים $1-\bar{x}$ הפיך. $\frac{1}{1-x}=1+\bar{x}+\dots+\bar{x}^{t-1}$ סכום סדרה הנדסית.
כי $\bar{x}$ נילפוטנטי כי $\bar{x}^t=0$.

• **טענה:** יהי $M \triangleleft R$ מקסימלי אז לכל n R/M^n מקומי.
R קומוטטיבי.

הוכחה: נחשב את M/M^n האידיאל המקסימלי היחיד. נראה שכל איבר מחוץ לו הוא הפיך וכך נוכיח שזה הוא האידיאל המקסימלי היחיד.

$\bar{x}\notin M/M^n \Rightarrow x\notin M$ ולכן ($\bar{x}=x+M^n$)

$M \subsetneq M+\langle x\rangle$ אבל M מקסימלי ולכן $R=M+\langle x\rangle$ ולכן $1=m+rx$ עבור $m\in M$ ו-$r\in R$.

$$1=1^n=(m+rx)^n=m^n+\underbrace{(n m^{n-1}r+\dots+r^n x^{n-1})}_{\in R}x$$

לכן $\overline{x}\,\overline{y} + \overline{m''} = \overline{1}$

לכן $\Leftarrow$ x הפיך.

מש"ל.

תרגיל: יהי R חוג קומוטטיבי שבו איבריו הם או מחלקי אפס (כולל אפס) או הפיכים. הוכיחו כי R מקומי.

הוכחה: $N=\{$מחלקי אפס כולל אפס$\}$ נראה שזהו אידיאל.

ודאי $0\in N$.

$x,a\in N \Leftarrow$ קיימים y,b כך ש- $xy=ab=0$

$(x+a)yb = xyb + ayb = 0$

ולכן $x+a\in N$.

בנוסף: $r\in R$, $a\in N \Leftarrow \exists b\ ab=0$

$ra\in N \Leftarrow r(ab)=0 = (ra)b=0$

מצאנו שאוסף האיברים הלא הפיכים (מחלקי האפס) הוא אידיאל ולכן החוג מקומי.