סעיף 4. המשך המידה של לבג

ראינו כי מידה m המוגדרת על אלגברה למחצה Σ_m ניתנת להרחבה בצורה יחידה ל $A(\Sigma_m)$.

בפרק זה נראה כי אם המידה הנתונה σ-אדיטיבית אז היא ניתנת להרחבה מ- Σ_m למחלקת הקבוצות הרבה יותר רחבה מאשר $A(\Sigma_m)$, ובמובן מסוים מקסימאלית. זה נעשה ע"י תהליך ההרחבה של לבג, הדומה לתהליך הדומה להשלמת המספרים הרציונאליים אל כל המספרים הממשיים. נתחיל מהמשך לבג של מידה המוגדרת על אלגברה (או חוג למחצה עם יחידה), ואולי נכליל זה אחר כך.

נניח שמידה m המוגדרת על אלגברה R היא σ-אדיטיבית.

הגדרה: $\{B_i\}_{i\in I}$ נקרא **כיסוי** של A ע"י קבוצות מ R אם $B_i\in R$ לכל $i\in I$ ו- $A\subset\bigcup_{i\in I}B_i$.

הכיסוי נקרא **סופי** או **בן מניה** אם I סופית או בת מניה בהתאמה.

<u>הגדרה 4.1</u> – המספר $\mu^*(A)=\inf\sum_{i\in I}m(B_i)$, $A\subset E$, נקרא <u>מידה חיצונית</u> של A , כאשר ה-inf הוא על כל הכיסויים הסופיים או הבני-מניה של A ע"י קבוצות מ R.

הערה: ניתן להגדיר בצורה זהה מידה חיצונית ממידה המוגדרת על אלגברה למחצה.

אם מתחילים מאלגברה, אזי כל כיסוי סופי $A_1,\dots,A_n$ ניתן להמיר בכיסוי ע"י קבוצה בודדת $B=\cup A_i$. (כי אלגברה סגורה תחת איחודים סופיים).

הגדרה: *קבוצה A היא **בעלת מידה 0** אם המידה החיצונית שלה היא 0. כלומר* $0=\mu^*(A)=\inf\sum_{i\in I}m(B_i)$

הגדרה זו תלויה כמובן במידה m ובחוג R. במקרה בו דנו בהתחלה, המידה m היא מידת האורך המוגדרת על החוג למחצה של כל הקטעים.

התכונה הבאה של מידה חיצונית חשובה לכל שנעשה בהמשך:.

<u>משפט 4.2</u> (אדיטיביות בת-מניה למחצה) -- אם $A\subset\bigcup_n A_n$ כאשר $\{A_n\}$ מערכת קבוצות סופית או ניתנת למניה, אז $\mu^*(A)\le\sum_n\mu^*(A_n)$.

למשל אם $A\subset B$ אז מתקיים $\mu^*(A)\le\mu^*(B)$.

מוכיחים את המשפט בדיוק כמו משפט 3.6.

הגדרה 4.3 – קבוצה A נקראת <u>מדידה</u> (לפי לבג) אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $B \in R$ כך ש- $\mu^*(A\Delta B) < \varepsilon$. (טוב לחשוב על B כ קרוב של A)

אם נסתכל על הפונקציה μ^* רק על קבוצות מדידות, היא נקראת <u>מידת לבג</u> (או סתם מידה), ומסמנים אותה μ.

ברור שכל קבוצה מ-R מדידה ואם $A \in R$, אז $\mu(A) = m(A)$ -- מפני ש-$\{A\}$ כיסוי של A, אז $\mu^*(A) \le m(A)$.

אבל אם $\{Q_j\}$ כיסוי כלשהו, סופי או בן-מניה, של A, אז לפי משפט 3.4 מתקיים $m'(A) \le \Sigma m(Q_j)$, ולכן $\mu^*(A) = m(A)$.

מה שהגדרה 4.3 אומרת לא קשה להבין: ניתן לקרב את A ע"י קבוצות "אלמנטאריות" (מ-R);

את $A\Delta B$, החלק לא משותף, ניתן לעשות קטן כרצוננו. (למשל - קבוצות מידה 0 "מקורבות" ע"י הקבוצה הריקה.)

הערה: כל מה שאמרנו נכון גם כשמתחילים מחוג למחצה.

במקרה של חוג – די בקבוצה אחת מהחוג כדי לקרב קבוצה מדידה.

משפט 4.4 – המערכת T של כל הקבוצות המדידות היא אלגברה.

הוכחה –

1. X מדיד כי הוא ב R.
2. מפני שמתקיים $A\Delta B = A^c \Delta B^c$ אם A מדידה אז גם (A^c) מדיד. (כלומר את A^c קרבנו ע"י B^c)

3. מספיק להוכיח כי אם $A_1, A_2 \in T$ אז $A = A_1 \cap A_2 \in T$.

אם A_1, A_2 מדידות אז קיימות $B_1, B_2 \in R(\Sigma_m)$ כך ש-

$$\mu^*(A_1 \Delta B_1) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad , \quad \mu^*(A_2 \Delta B_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

מפני ש- $B = B_1 \cap B_2 \in R(\Sigma_m)$ ומתקיים $A\Delta B \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$

נקבל $\mu^*(A\Delta B) < \varepsilon$.

זה נכון לכל ε, אז A קבוצה מדידה. מש"ל.

(בס"כ את קירבנו את החיתוך ע"יי חיתוך הקרובים) ▲

משפט 4.5 – הפונקציה $\mu(A)$ אדיטיבית על המערכת T של קבוצות מדידות, ז"א לכל אוסף סופי $\{A_k\}$

של קבוצות זרות בזוגות ומדידות $\mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$.

כדי להוכיח את המשפט נצטרך את

<u>למה 4.6</u> – לכל שתי קבוצות A,B מתקיים $|\mu^*(A)-\mu^*(B)|\le\mu^*(A\Delta B)$.

<u>הוכחת הלמה</u> – מפני ש- $A\subset B\cup(A\Delta B)$ לפי משפט 4.2 $\mu^*(A)\le\mu^*(B)+\mu^*(A\Delta B)$.

זה בדיוק הלמה אם $\mu^*(A)\ge\mu^*(B)$. אם אחרת, $\mu^*(A)\le\mu^*(B)$, אז הלמה נובעת מאי-שוויון $\mu^*(B)\le\mu^*(A)+\mu^*(A\Delta B)$. מש"ל ▲

<u>הוכחת המשפט</u> – מספיק להוכיח את המשפט לשתי קבוצות A_1,A_2 .

ניקח $\varepsilon>0$ וכיסויים B_1,B_2 כך ש- $\mu^*(A_2\Delta B_2)<\varepsilon$, $\mu^*(A_1\Delta B_1)<\varepsilon$.

אם $A=A_1\cup A_2$ ו- $B=B_1\cup B_2$, ממשפט 4.4 נובע שהקבוצות A,B מדידות. מפני ש- A_1,A_2 זרות

$$B_1\cap B_2\subset(A_1\Delta B_1)\cup(A_2\Delta B_2)$$

ולכן $m(B_1\cap B_2)\le 2\varepsilon$.

לפי למה 4.6 מתקיים $|m(B_2)-\mu^*(A_2)|<\varepsilon$, $|m(B_1)-\mu^*(A_1)|<\varepsilon$.

מפני שהמידה אדיטיבית על הכיסויים, נקבל

$$m(B)=m(B_1)+m(B_2)-m(B_1\cap B_2)\ge\mu^*(A_1)+\mu^*(A_2)-4\varepsilon$$

מפני ש- $A\Delta B\subset(A_1\Delta B_1)\cup(A_2\Delta B_2)$

נקבל $\mu^*(A)\ge m(B)-\mu^*(A\Delta B)\ge m(B)-2\varepsilon\ge\mu^*(A_1)+\mu^*(A_2)-6\varepsilon$.

מפני ש- $\varepsilon>0$ קטן כרצוננו , $\mu^*(A)\ge\mu^*(A_1)+\mu^*(A_2)$.

אבל אי-השוויון ההפוך $\mu^*(A)\le\mu^*(A_1)+\mu^*(A_2)$ נכון, לפי משפט 4.2, תמיד, ולבסוף

$\mu^*(A)=\mu^*(A_1)+\mu^*(A_2)$.

מפני ש- A_1,A_2 מדידות ניתן לרשום μ במקום μ^* . מש"ל. ▲

<u>משפט 4.7</u> – הפונקציה $\mu(A)$ אדיטיבית- σ על האוסף T של קבוצות מדידות .

<u>הוכחה</u>- נניח ש- $A,A_1,\dots,A_n\in\mathrm{T}$, $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ ו- $\{A_n\}$ זרות בזוגות.

לפי משפט 4.2 $\mu(A)\le\sum_n\mu(A_n)$, ולפי משפט 4.5 לכל N מתקיים $\mu(A)\ge\mu(\bigcup_{n=1}^{N}A_n)=\sum_{n=1}^{N}\mu(A_n)$

.

לכן $\mu(A)\ge\sum_n\mu(A_n)$.משני אי-השוויונות נובע השוויון הנדרש. מש"ל. ▲

משפט 4.8- המערכת T של קבוצות מדידות לפי לבג היא σ-אלגברה .

הוכחה- מספיק להוכיח שאם $A_1,\ldots,A_n \ldots \in T$ אז גם $A=\bigcup_n A_n \in T$. נסמן $A'_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$.

ברור כי A'_n זרות בזוגות ומתקיים $A=\bigcup_n A'_n$. לפי משפט 4.4 הקבוצות A'_n מדידות.

לפי משפט 4.5 והגדרת מידה חיצונית, לכל n סופי $\sum_{k=1}^{n}\mu(A'_k) = \mu(\bigcup_{k=1}^{n} A'_k) \le \mu^*(A)$

ואז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A'_n)$ מתכנס, ולכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך ש- $\sum_{n>N}\mu(A'_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. מפני שהקבוצה

$C=\bigcup_{n=1}^{N} A'_n$ מדידה (איחוד סופי), קיימת קבוצה $B \in R(\Sigma_m)$ כך ש- $\mu^*(C\Delta B) < \frac{\varepsilon}{2}$.

מפני ש- $A\Delta B < (C\Delta B)\bigcup(\bigcup_{n>N} A'_n)$, נקבל $\mu^*(A\Delta B) < \varepsilon$, ז"א A מדידה. מש"ל. ▲

σ-אדיטיביות של המידה נובעת **הרציפות** שלה.

משפט 4.9- אם μ מידה אדיטיבית-σ המוגדרת על אלגברת-σ, ו- $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$

שרשרת קבוצות מדידות יורדת ; ו- $A=\bigcap_n A_n$, אז $\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$.

הוכחה- מספיק להוכיח את המשפט במקרה ש- $A=\phi$, אחרת נחליף A_n ל- $A_n \setminus A$.מתקיים:

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2)\cup(A_2 \setminus A_3)\cup\cdots$$

$$A_n = (A_n \setminus A_{n+1})\cup(A_{n+1} \setminus A_{n+2})\cup\cdots$$

והמחוברים זרים בזוגות. לפי אדיטיביות-σ של μ

$$\mu(A_1)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k \setminus A_{k+1})$$

$$\ldots\ldots$$

$$\mu(A_n)=\sum_{k=n}^{\infty}\mu(A_k \setminus A_{k+1})$$

מפני שהטור $\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k \setminus A_{k+1})$ מתכנס, הזנב שלו שואף לאפס כאשר $n\to\infty$.

לכן $\mu(A_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. מש"ל. ▲

מסקנה – אם $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ שרשרת קבוצות מדידות עולה ו- $A=\bigcup_n A_n$,

אז לאותה מידה μ מתקיים $\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$.

הוכחה – פשוט נעבור מקבוצות A_n למשלימים ונשתמש במשפט קודם. אפשר להוכיח גם ישר.

זה גם תכונת הרציפות בצורה שקולה. מש"ל. ▲

ז"א בדקנו שהמערכת T היא אלגברת-σ, והפונקציה $\mu(A)$ המוגדרת עליה היא בעלת כל התכונות של מידה אדיטיבית-σ. זה מצדיק את

הגדרה 4.10 – הפונקציה $\mu(A)$ המוגדרת על המערכת T של קבוצות מדידות (לפי m) והמתלכדת על T עם המידה החיצונית $\mu^*(A)$ נקראת ההרחבה של לבג $\mu=L(m)$ של המידה m.

נדון על עוד תכונה חשובה של מידות לבג.

הגדרה 4.12 – המידה μ נקראת שלמה אם מ- $\mu(A)=0$ ו- $A'\subset A$ נובע כי A' מדידה.

ברור שאם זה כך אז $\mu(A')=0$. לא קשה להוכיח כי המשך לבג של מידה כלשהי שלם. זה נובע מן העובדה שאם $A'\subset A$ ו- $\mu(A)=0$ אז $\mu^*(A')=0$ וכל קבוצה C שעבורה $\mu^*(C)=0$ מדידה, כי $\phi\in R(\Sigma_m)$ ו- $\mu^*(C\Delta\phi)=\mu^*(C)=0$.

כל מידה אדיטיבית-σ על אלגברת-σ ניתן להמשיך עד מידה שלמה בהגדרת אותה אפס על כל תת-קבוצה של קבוצת מידת אפס.