לינארית 1 - תרגיל 4

מתרגלים: עוזי, עדי, יעל ואחמד.

תאריך הגשה: בשבוע של השלישי בדצמבר

תרגיל 1. מרוכבים

1. הוכח שלכל מספר מרוכב z מתקיים $z^{-1}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$

פתרון.

כדי לבדוק שזה באמת נכון נחשב את zz^{-1} ונראה שהוא באמת שווה ל-1

$$zz^{-1}=z\cdot\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{z\bar{z}}{|z|^2}=\frac{|z|^2}{|z|^2}=1$$

לכן ההופכי של zהוא $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$. שימו לב שאם $z=0$ ההופכי לא קיים!

2. חשב את $\left(i+\left(i+(i+1)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}$

פתרון.

לפי הסעיף הקודם

$$(i+1)^{-1}=\frac{1-i}{2}$$

לכן

$$\left(i+\left(i+(i+1)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}=\left(i+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{-1}\right)^{-1}$$

שוב לפי הסעיף הקודם

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{-1}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}}=1-i$$

לכן

$$\left(i+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{-1}\right)^{-1}=(i+1-i)^{-1}=1^{-1}=1$$

3. חשב את $\left(1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{34}\right)^{71}$

פתרון.
תחילה נחשב את הסכום

$$1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{34}$$

נשים לב ש-

$$1+i+i^2+i^3=0$$

ובאופן כללי

$$i^{4n}+i^{4n+1}+i^{4n+2}+i^{4n+3}=0$$

מכאן

$$1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{34}=i^{32}+i^{33}+i^{34}=\left(i^4\right)^8+\left(i^4\right)^8i+\left(i^4\right)^8i^2=1+i-1=i$$

לכן

$$\left(1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{34}\right)^{71}=i^{71}=\left(i^4\right)^{17}i^3=-i$$

4. הציגו את המספרים הבאים בהצגה קוטבית

(א) $1+i$

פתרון.
נחשב את r,θ לפי הנסחאות מהתרגול

$$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

ו-

$$\tan\theta=\frac{1}{1}\rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

לכן

$$1+i=\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

(ב) $-\frac{1}{\sqrt{3}}-i$

פתרון.
נחשב את r,θ לפי הנסחאות מהתרגול

$$r=\sqrt{(-1)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{3}}$$

ו-

$$\tan\theta=\frac{-1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}}\rightarrow\tan\theta=\sqrt{3}\rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}$$

לכן

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}-i=\sqrt{\frac{4}{3}}cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

תרגיל 2. פתרו את המערכות הבאות

.1 $\begin{cases} x & + & 4y & + & 5z & = & 6 \\ -x & - & 2y & - & 6z & = & -3 \\ 4x & + & 10y & + & 23z & = & 15 \end{cases}$

פתרון.

נציג את המערכת ונדרג אותה לפי אלגוריתם גאוס.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -6 & -3 \\ 4 & 10 & 23 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - 1R_1]{R_2 + R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & 3 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+3R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נסמן $z = t$ נקבל $y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}t$ ו-$x = -7t$, לסיכום יש אינסוף פתרונות והן מהצורה

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7t \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -7 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

.2 $\begin{cases} 3x + 2y + w & = & 4 \\ -2x + 4z - 6w & = & -4 \\ x + y + z - w & = & 1 \end{cases}$

פתרון.

נציג את המערכת ונדרג אותה לפי אלגוריתם גאוס.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 4 & -6 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & -6 & -4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - 3R_1]{R_2 + 2R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -8 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-\frac{1}{2}R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נסמן $z=t$, $w=s$ נקבל $y=-1-3t+4s$ ו-$x=2-3s+2t$, לסיכום יש אינסוף פתרונות והן מהצורה

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3s+2t \\ -1-3t+4s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל 3. עבור אילו ערכי a יש למערכות הבאות פתרון יחיד, אין פתרון או אינסוף פתרונות במקרה כזה הציגו את הפתרון הכללי.

.1
$$\begin{cases} ax + ay - az = a \\ -x + 4y - az = 0 \\ 2x - 8y + 4z = 1 \end{cases}$$

פתרון.
נציג את המערכת ונדרג אותה לפי אלגוריתם גאוס.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & a & -a & a \\ -1 & 4 & -a & 0 \\ 2 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -a & 0 \\ a & a & -a & a \\ 2 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_2+aR_1 \\ R_3+2R_1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -a & 0 \\ 0 & 5a & -a^2-a & a \\ 0 & 0 & 4-2a & 1 \end{array}\right)$$

יש פתרון יחיד כאשר יש 3 איברים פותחים כלומר כאשר $\rightarrow \begin{cases} 5a \neq 0 \\ 4-2a \neq 0 \end{cases}$
$a \neq 0,2$ יש פתרון יחיד, נציג את המקרים $a=0,2$ ונראה מה נקבל

- $a=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

במקרה זה יש אינסוף פתרונות והפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ t \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

- $a=2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -10 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

במקרה זה אין פתרון היות וקיבלנו שורת סתירה.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & a \\ ax & + & (2a-2)\,y & + & (a^2+a)\,z & = & a^2 \\ -6x & - & 2y-2ya & - & za^2-5az & = & -5a-3 \end{array}\right.$$ .2

פתרון.

נציג את המערכת ונדרג אותה לפי אלגוריתם גאוס.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 2a-2 & a^2+a & a^2 \\ -6 & -2-2a & -a^2-5a & -5a-3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3+6R_1]{R_2-aR_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-2 & a^2 & 0 \\ 0 & 4-2a & -a^2-5a+6 & a-3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+2R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-2 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-5a+6 & a-3 \end{array}\right)$$

יש פתרון יחיד כאשר יש 3 איברים פותחים כלומר כאשר $\rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a-2 & \neq & 0 \\ a^2-5a+6 & \neq & 0 \end{array}\right.$

$a \neq 2,3$ יש פתרון יחיד, נציב את המקרים $a = 2,3$ ונראה מה נקבל

- $a = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

במקרה זה אין פתרון היות וקבלנו שורת סתירה.

- $a = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

במקרה זה יש אינסוף פתרונות והפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+8t \\ -9t \\ t \end{pmatrix}$$

תרגיל 4. נתונות שתי מערכות משוואות (1) $Ax = b_1$ ו- (2) $Ax = b_2$ הוכח או הפרך.(A אינה חייבת להיות ריבועית!)

1. אם למערכת (1) יש אינסוף פתרונות אז גם למערכת (2) יש אינסוף פתרונות.

פתרון.

לא נכון, ניקח את מערכות המשוואות הבאות

$$\begin{array}{c} (1)\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 1 \end{array}\right. \\ (2)\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 2 \end{array}\right. \end{array}$$

למערכת (1) יש אינסוף פתרונות ולמערכת (2) אין פתרון

2. אם למערכת (1) יש פתרון יחיד אז גם למערכת (2) יש פתרון יחיד.

פתרון.
לא נכון, ניקח את מערכות המשוואות הבאות

$$
\begin{aligned}
(1)\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ y & + & z & = & 0 \\ x & + & z & = & 0 \\ x & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \\
(2)\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ y & + & z & = & 0 \\ x & + & z & = & 0 \\ x & + & 2z & = & 1 \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

למערכת (1)יש פתרון יחיד פתרונות ולמערכת (2)אין פתרון. במקרה ו-A ריבועית הטענה נכונה.

3. אם למערכת (1) אין פתרון אז גם למערכת (2) אין פתרון.

פתרון.
לא נכון, ניקח את אותה דוגמא מסעיף 1

תרגיל 5. נתון

$$
A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}
$$

הראו כי

1. $AB=BA=0$

פתרון.

$$
AB=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
BA=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

2. $CA=C$

פתרון.

$$
CA=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}=C
$$

3. $AC = A$

פתרון.

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = A$$

4. מה המסקנות שלכם משאלה הזאת?

פתרון.

(א) מהסעיף הראשון ניתן להסיק שיתכן ש- $AB = BA = 0$ אבל $A \neq 0,\ B \neq 0$, כלומר יש מחלקי אפס במטריצות

(ב) מסעיפים ושלישי ניתן להסיק ש-$CA = C \neq A = AC$ כלומר מטריצות אינם מתחלפות.

תרגיל 6. נתון $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ חשב את

1. A^{-1}

פתרון.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

לכן

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. $(A^{-1})^2$(לא לפחד ממספרים גדולים)

פתרון.

$$(A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 125 & -24 & -22 \\ 50 & -9 & -9 \\ -68 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

3. A^2

פתרון.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 18 \\ 12 & 4 & 25 \\ 38 & 7 & 75 \end{pmatrix}$$

4. מה אתה צפוי לקבל אם תכפיל את המטריצה שקבלת בסעיף 3 במטריצה שקבלת בסעיף 2? בצע את ההכפלה, ובדוק שאתה באמת צודק.

פתרון.
היות אנחנו יודעים ש-$\left(A^{-1}\right)^2 = \left(A^2\right)^{-1}$, מסומן כ-$A^{-2}$ ניתן להסיק ש-

$$A^2 \cdot \left(A^{-1}\right)^2 = I$$

כלומר הכפל שלהם אמור לתת לי את מטריצת היחידה ואכן

$$\begin{pmatrix} 125 & -24 & -22 \\ 50 & -9 & -9 \\ -68 & 13 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 2 & 18 \\ 12 & 4 & 25 \\ 38 & 7 & 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 18 \\ 12 & 4 & 25 \\ 38 & 7 & 75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 125 & -24 & -22 \\ 50 & -9 & -9 \\ -68 & 13 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 7. עבור המטריצה $A = \begin{pmatrix} a(a+1) & a^2+3a & -a^2 \\ a+1 & 2 & 1 \\ 2(a+1) & 4 & a^2+3 \end{pmatrix}$ קבע:

1. עבור אילו ערכי a ממשי המטריצה לא הפיכה?

2. עבור אילו ערכי a מרוכב המטריצה לא הפיכה?

פתרון.
ראשית נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} a(a+1) & a^2+3a & -a^2 \\ a+1 & 2 & 1 \\ 2(a+1) & 4 & a^2+3 \end{pmatrix} \to \ldots \to \begin{pmatrix} (a+1) & 2 & 1 \\ 0 & a(a+1) & -a(a+1) \\ 0 & 0 & a^2+1 \end{pmatrix}$$

אם למטריצה יש 3 איברים מובילים אז היא הפיכה, לכן כדי שתהיה הפיכה צריך להתקיים

$$\begin{cases} a_{11} & \neq & 0 \\ a_{22} & \neq & 0 \\ a_{33} & \neq & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+1) & \neq & 0 \\ a(a+1) & \neq & 0 \\ a^2+1 & \neq & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a & \neq & -1,0 & \text{In } \mathbb{R} \\ a & \neq & 0,-1,i,-i & \text{In } \mathbb{C} \end{cases}$$

בהצלחה!!