פתרון תרגיל 2

תרגיל 1

א. רפלקסיביות-מכיוון ש $(1,1)\notin R_1$ היחס לא רפלקסיבי.

סימטריות –מכיוון ש $(1,2)\in R_1$ אבל $(2,1)\notin R_1$ היחס לא סימטרי.

טרנזטיביות- יהיו $(a,b)\in R_1,(b,c)\in R_1$ על פי הגדרת R_1 $a<b,b<c$ ולכן $a<c$ ו על פי הגדרת R_1 נקבל $(a,c)\in R_1$ ולכן היחס הוא טרנזטיבי.

ב. רפלקסיביות- לכל $a\in N$, $a\le a$ וכל על פי הגדרת R_2 נקבל $(a,a)\in R_2$ ולכן היחס רפלקסיבי.

סימטריות- מכיוון ש $(1,2)\in R_2$ אבל $(2,1)\notin R_2$ היחס לא סימטרי.

טרנזטיביות-- יהיו $(a,b)\in R_2,(b,c)\in R_2$ על פי הגדרת R_2 $a\le b,b\le c$ ולכן $a\le c$ ו על פי הגדרת R_2 נקבל $(a,c)\in R_2$ ולכן היחס הוא טרנזטיבי.

ג. רפלקסיביות- לכל $a\in N$, $a=a$ וכל על פי הגדרת R_3 נקבל $(a,a)\in R_3$ ולכן היחס רפלקסיבי.

סימטריות- יהי $(a,b)\in R_3$ על פי הגדרת R_3 נקבל $a=b$ ז"א $b=a$, ולכן על פי הגדרת R_3 נקבל $(b,a)\in R_3$.

טרנזטיביות-- יהיו $(a,b)\in R_3,(b,c)\in R_3$ על פי הגדרת R_3 $a=b,b=c$ ולכן $a=c$ ו על פי הגדרת R_3 נקבל $(a,c)\in R_2$ ולכן היחס הוא טרנזטיבי.

סה"כ קיבלנו יחס שקילות וקבוצת המנה היא לכל $a\in N$ $[a]_{R_3}=\{a\}$ ז"א $N/R_3=N$.

תרגיל 2

א. רפלקסיביות- יהי x מספר ממשי $|x-x|=|0|=0<1$ ולכן על פי הגדרת היחס R נקבל $(x,x)\in R$.

סימטריות- יהי $(x,y)\in R$ מהגדרת היחס R והערך המוחלט נקבל $|y-x|=|x-y|<1$ ולכן $(y,x)\in R$.

טרנזטיביות- $\left|2\frac{1}{3}-1\frac{2}{3}\right|<1,\left|1\frac{2}{3}-1\right|<1,\left|2\frac{1}{3}-1\right|>1$ סה"כ קיבלנו ש

$\left(1\frac{2}{3},1\right)\in R,\left(2\frac{1}{3},1\frac{2}{3}\right)\in R$ אבל $\left(2\frac{2}{3},1\right)\notin R$ ולכן היחס לא טרנזטיבי.

סה"כ קיבלנו שהיחס R הוא לא יחס שקילות.

ב. רפלקסיביות- כמו בסעיף א.

סימטריות- $\left(2,1\frac{1}{2}\right)\in T$ אבל $\left(1\frac{1}{2},2\right)\notin T$.

טרנזטיביות- - $2\frac{1}{3}-1\frac{2}{3}<1,1\frac{2}{3}-1<1,2\frac{1}{3}-1>1$ סה"כ קיבלנו ש

$\left(1\frac{2}{3},1\right)\in T,\left(2\frac{1}{3},1\frac{2}{3}\right)\in T$ אבל $\left(2\frac{2}{3},1\right)\notin T$ ולכן היחס לא טרנזטיבי.

סה"כ קיבלנו שהיחס T הוא לא יחס שקילות.

ג. דומה מאוד לסעיף ב.

תרגיל 3

א.

נכון יהי $x\in A$ על פי הנתון $x\in\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ על פי הגדרת האיחוד קיים i שעבורו $x\in A_i$ על פי הגדרת היחס R נקבל ש $(x,x)\in R$ ולכן R יחס רפלקסיבי.

ב. נכון

מכיוון ש $A_1,A_2,...,A_n$ אוסף תת קבוצות של A נקבל ש $\bigcup_{i=1}^{n} A \subseteq A$ נוכיח ש $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A$.

יהי $x \in A$ נתון ש היחס R רפלקסיבי ולכן היחס $(x,x) \in R$ על פי הגדרת היחס R קיים i שעבורו $x \in A_i$ ולכן $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

ג. דוגמא נגדית

$A=\{1,2,3\}$ $A_1=\{1\},A_2=\{2\}$ בדוגמא זו $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ וכן $3 \in A$ אבל $(3,3) \notin R$ ולכן היחס לא רפלקסיבי.

ד. דוגמא נגדית

אם $A=\{1,2,3\}$ ו $A_1=\{1\},A_2=\{1,2\}$ אז $R=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$. R טרנזטיבי אבל $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$.

תרגיל 4

א.

יהי $(x,y) \in S \circ R$ מהגדרת ההרכבה קיים z כך ש $(x,z) \in R \wedge (z,y) \in S$ מהנתון נקבל ש $(x,z) \in V \wedge (z,y) \in W$ מהגדרת ההרכבה $(x,y) \in W \circ V$.

ב.

$(x,y) \in (S \cup W) \circ R$ אם ורק אם (מהגדרת ההרכבה) קיים z כך ש $(x,z) \in R \wedge (z,y) \in S \cup W$ אם ורק אם (מהגדרת האיחוד) $(x,z) \in R \wedge [(z,y) \in S \vee (z,y) \in W]$ אם ורק אם (דסטריביוטיביות) $[(x,z) \in R \wedge (z,y) \in S] \vee [(x,z) \in R \wedge (z,y) \in W]$ אם ורק אם (מהגדרת ההרכבה) $(x,y) \in S \circ R \vee (x,y) \in W \circ R$ אם ורק אם (מהגדרת האיחוד) $(x,y) \in (S \circ R) \cup (W \circ R)$.

מכיוון שכל המעברים היו אם ורק אם קיבלנו שווין.

ג.

דוגמא נגדית

$$S=\{(1,2),(3,4),(3,2)\}, W=\{(3,4),(5,2)\}, R=\{(2,3),(2,5)\}$$

$$(S \cap W) \circ R \subseteq \{(3,4)\} \circ \{(2,3),(2,5)\} = \{(2,4)\}.$$

$$S \circ R \cap W \circ R = \left(\{(1,2),(3,4),(3,2)\} \circ \{(2,3),(2,5)\}\right) \cap \left(\{(3,4),(5,2)\} \circ \{(2,3),(2,5)\}\right) =$$

$$= \{(2,4),(2,2)\} \cap \{(2,4),(2,2)\} = \{(2,4),(2,2)\} \neq \{(2,4)\}$$

תרגיל 5

א.

$$R\circ S=\{(4,2),(3,2),(1,4)\}$$
$$S\circ R=\{(1,5),(3,2),(2,5)\}$$
$$S^{-1}=\{(2,4),(5,2),(1,3),(3,1)\}$$
$$R\circ S^{-1}=\{(5,2),(1,4),(3,2)\}$$
$$\left(R\circ S^{-1}\right)\circ R=\varnothing$$
$$S^{-1}\circ R^{-1}=(R\circ S)^{-1}=\{(2,4),(2,3),(4,1)\}$$
$$\left(S^{-1}\circ R^{-1}\right)\circ S=\{(4,4),(4,3)\}$$

ב1.

רפלקסיביות- יהי $x\in N$ כעת $3\big|(x+2x)$ ולכן $(x,x)\in R$

סימטריות – נניח ש $(x,y)\in R$ ז"א $3\big|(x+2y)$

$y+2x=(x+2y)+(x+2y)-3y$ ולכן $3\big|(y+2x)$ ז"א $(y,x)\in R$

טרנזטיביות- יהי $(x,y)\in R,(y,z)\in R$ ז"א $3\big|(x+2y),3\big|(y+2z)$.

$x+2z=(x+2y)+(y+2z)-3y$ ולכן $3\big|(x+2z)$

סה"כ קיבלנו ש R הוא יחס שקילות.

מחלקות השקילות

$$[1]_R=\{1,4,7,...,1+3n,...\}=\{1+3n\,|\,n\in N\cup\{0\}\}$$
$$[2]_R=\{2,5,8,...,2+3n,...\}=\{2+3n\,|\,n\in N\cup\{0\}\}$$
$$[3]_R=\{3,6,9,...,3n,...\}=\{3n\,|\,n\in N\}$$

ב2.

דוגמא לשם המחשה בלבד (אני מזכיר שדוגמא אינה מהווה הוכחה)

$$B=\{1,2\}$$
$$A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$
$$(\{1\},\{1,2\})\in R,(\{1,2\},\{2\})\in R,(\{1\},\{2\})\notin R$$

והנה ההוכחה

לא מתקיים טרנזטיביות- יהי B קבוצה כך ש $|B|\geq 2$ ויהיו $x,y\in B$ כך ש $x\neq y$ קיימים כאלה על פי הנתון. על פי הגדרת קבוצת חזקה $\{x\},\{y\},\{x,y\}\in A$ על פי הגדרת היחס R נקבל $(\{x\},\{x,y\})\in R,(\{x,y\},\{y\})\in R$ מכיוון ש $x\neq y$ נקבל $(\{x\},\{y\})\notin R$ ולכן היחס R אינו טרנזטיבי.

תרגיל 6

רפלקסיביות-יהי $(a,b)\in A\times B$ על פי הגדרת מכפלה קרטזית $a\in A$ על פי הנתון E יחס שקילות על קבוצה A ולכן $(a,a)\in E$ באותו אופן $(b,b)\in F$ על פי הגדרת G נקבל $((a,b),(a,b))\in G$.

סימטריות- יהי $((a_1,b_1),(a_2,b_2))\in G$ על פי הגדרת G נקבל ש $(a_1,a_2)\in E,(b_1,b_2)\in F$ מכיוון ש E,F הם יחס שקילות נקבל $(a_2,a_1)\in E,(b_2,b_1)\in F$ ומהגדרת G נקבל $((a_2,b_2),(a_1,b_1))\in G$.

טרנזטיביות- יהיו $((a_1,b_1),(a_2,b_2))\in G$, $((a_2,b_2),(a_3,b_3))\in G$ על פי הגדרת G נקבל ש
$(a_1,a_2),(a_2,a_3)\in E,(b_1,b_2),(b_2,b_3)\in F$ מכיוון ש E,F הם יחס שקילות נקבל
$(a_1,a_3)\in E,(b_1,b_3)\in F$ ומהגדרת G נקבל $((a_1,b_1),(a_3,b_3))\in G$.

תרגיל 7

א.
לא נכון דוגמא נגדית (שימו לב שיש מקרים ש R,S יחס שקילות על קבוצה A ואכן $R\cup S$ יחס שקילות לדוגמא אם $R=S$)
נניח ש $A=\{1,2,3\}$, $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\}$ ו
$S=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ נקבל ש R,S יחס שקילות על קבוצה A וכן
$(3,1),(1,2)\in R\cup S$ אבל $(3,2)\notin R\cup S$ ולכן $R\cup S$ לא יחס שקילות.

ב.
לא נכון דוגמא נגדית
נניח ש $A=\{1\}$ ו $R=(1,1)$ נקבל ש $(1,1)\notin (A\times A)\setminus R$ ולכן לא רפלקסיבי ולכן לא יחס שקילות.

ג.
לא נכון דוגמא נגדית
נניח ש $A=\{1,2,3\}$, $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\}$
נשים לב ש $(1,2),(2,3)\in (A\times A)\setminus R\cup I_A$ אבל $(1,3)\notin (A\times A)\setminus R\cup I_A$.

ד.
לא נכון דוגמא נגדית
נניח ש $A=\{1,2,3\}$, $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\}$ ו
$S=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ נקבל ש R,S יחס שקילות על קבוצה A
אבל $R\setminus S=\{(1,3),(3,1)\}$ לא רפלקסיבי ולכן לא יחס שקילות.

ה.
נכון הוכחה
בתרגול הראנו שאם R יחס טרנזטיבי ורפלקסיבי אז $R\circ R=R$. במקרה שלנו R יחס שקילות ובפרט טרנזטיבי ורפלקסיבי ולכן $R\circ R=R$ ומכיוון ש R יחס שקילות נקבל ש $R\circ R$ יחס שקילות.

ו.
לא נכון דוגמא נגדית
נניח ש $A=\{1,2,3\}$, $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\}$ ו
$S=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ נקבל ש R,S יחס שקילות על קבוצה A.
$(2,3)\in R\circ S$ אבל $(3,2)\notin R\circ S$ ולכן לא סימטרי ולכן לא יחס שקילות.

תרגיל 8

א. פונקציה מכיוון שלכל $x\in Z$ קיים y יחיד שעבורו $x^2=y\in Z$.

ב. לא פונקציה מכיוון שקיים $x\in R$ לדוגמא $\frac{1}{2}$ שעבורו לא קיים y המקיים $x^2=y\in Z$ ($\frac{1}{4}\notin Z$)

ג. פונקציה אותו נימוק כמו בסעיף א ד. פונקציה (הייה בתרגול).

תרגיל 9

א. נתון ש A,B קבוצות לא ריקות. יהי $b\in B$
נגדיר פונקציה $g:A\to A\times B$ ע"י לכל $a\in A$ $g(a)=(a,b)$.

נוכיח ש g חח"ע: יהיו $a_1,a_2\in A$ ונניח ש $g(a_1)=g\left(a_2\right)$ ז"א $(a_1,b)=(a_2,b)$ על פי הגדרת זוג סדור $a_1=a_2$.

תרגיל 10

א. f אינה פונקציה מכיוון שקיים $x\in Z$ נניח $x=-1$ כך ש $f\left(x\right)\notin N$.

ב. f חח"ע- יהיו $n_1,n_2\in R$ כך ש $f(n_1)=f(n_2)$ ז"א $n_1^{\,3}=n_2^{\,3}$ כעת $n_1^{\,3}=n_2^{\,3}\leftrightarrow n_1^{\,3}-n_2^{\,3}=0\leftrightarrow\left(n_1-n_2\right)\left(n_1^{\,2}+n_1n_2+n_2^{\,2}\right)=0$ לא קיימים $n_1,n_2\in R$ שעבורם $n_1^{\,2}+n_1n_2+n_2^{\,2}=0$ ולכן הפתרון היחיד הוא $n_1=n_2$.

f על- יהי $n\in R$ נתבונן במשוואה $x^3-n=0$ מכיוון שהחזקה של הפולינום היא אי זוגית נקבל לפחות פתרון ממשי אחד נסמנו ב $\sqrt[3]{n}$. כעת $f\left(\sqrt[3]{n}\right)=\left(\sqrt[3]{n}\right)^3=n$.

ולכן f הפיכה. הפונקציה ההופכית היא $g\left(n\right)=\sqrt[3]{n}$ נראה שפונקציה זו היא אכן הפונקציה ההופכית $f(g(n))=f(\sqrt[3]{n})=(\sqrt[3]{n})^3=n$ וכן $g\left(f\left(n\right)\right)=g\left(n^3\right)=\sqrt[3]{n^3}=n$, ולכן $f\circ g=g\circ f=I$.

ג. f חח"ע- יהיו $n_1,n_2\in Q$ כך ש $f(n_1)=f(n_2)$ ז"א כך ש $2^{n_1}=2^{n_2}$ ולכן $n_1=n_2$.

f אינה על מכיוון שלא קיים מספר רציונאלי עבורו $2^n=3$ למשל.

ד. f חח"ע- יהיו $B_1,B_2\in P(A)$ ונניח ש $f(B_1)=f(B_2)$ ז"א $A\setminus B_1=A\setminus B_2$ נוכיח ש $B_1=B_2$

נוכיח תחילה ש $B_1\subseteq B_2$

יהי $x\in B_1$ מכיוון ש $B_1\in P(A)$ עלפי הגדרת החזקה $B_1\subseteq A$ ולכן $x\in A$ מכיוון ש $A\setminus B_1=A\setminus B_2$ נקבל ש $x\notin A\setminus B_2$ ז"א $x\notin A\vee x\in B_2$ אבל $x\in A$ ולכן בהכרח $x\in B_2$.

באותו אופן ניתן להוכיח ש $B_2\subseteq B_1$.

f על- יהי $B\in P(A)$ נתבונן ב

$$f(A\setminus B)=A\setminus(A\setminus B)=A\cap\left(A\cap B^c\right)^c=A\cap\left(A^c\cup B\right)=\left(A\cap A^c\right)\cup\left(A\cap B\right)=B$$

השוויון הראשון-נובע מהגדרת f. השוויון השני-נובע מהתרגול. השוויון השלישי- דה מורגן

השוויון הרביעי-דסטריביוטיביות

השוויון החמישי-נתון ש $B\in P(A)$ על פי הגדרת החזקה $B\subseteq A$ הובחנו בתרגול שאם $B\subseteq A$ אז $A\cap B=B$.

קיבלנו ש f הפיכה והפונקציה ההופכית $g(B)=A\setminus B$.

$f\left(g\left(B\right)\right)=f\left(A\setminus B\right)=A\setminus\left(A\setminus B\right)=B$ באותו אופן $g\left(f\left(B\right)\right)=B$ ולכן $f\circ g=g\circ f=I$.

ה. F חח"ע- יהיו $A_1,A_2\in P(X)$ כך ש $f\left(A_1\right)=f\left(A_2\right)$ ז"א $\left\{f(a)\middle|a\in A_1\right\}=\left\{f\left(a\right)\middle|a\in A_2\right\}$

נוכיח ש $A_1=A_2$ תחילה נוכיח ש $A_1\subseteq A_2$.

יהי $x\in A_1$ ולכן $f(x)\in\left\{f\left(a\right)\middle|a\in A_1\right\}=\left\{f\left(a\right)\middle|a\in A_2\right\}$ מכיוון ש f חח"ע $x\in A_2$ כי אחרת (ז"א אם $x\notin A_2$) נקבל ש $f(x)\in\left\{f\left(a\right)\middle|a\in A_2\right\}$ ז"א קיים $y\in A_2$ כך ש $f(x)=f(y)$ מכיוון שמצד אחד $x\notin A_2$ ומצד שני $y\in A_2$ נקבל ש $x\neq y$ בסתירה לנתון ש f חח"ע.

F לא בהכרח על- כי f לא על אז קיים $y\in Y$ כך שעבורו לא קיים x כך ש $f(x)=y$ ובפרט לא קיים $A\in P(X)$ כך ש $y\in\left\{f(a)\middle|a\in A\right\}$ ובפרט $\left\{y\right\}\neq\left\{f(a)\middle|a\in A\right\}$ ומהגדרת החזקה $\left\{y\right\}\in P(Y)$.

ו. F לא בהכרח חח"ע- הוכחה דומה להוכחה ש F לא על בסעיף הקודם.

F על- יהי $B \in P(Y)$ על פי הגדרת החזקה $B \subseteq Y$ מכיוון ש f על לכל $b \in B$ קיים $a \in X$ כך ש
$f(a) = b$ נתבונן בקבוצה $A = \left\{ f^{-1}\left[B\right] \right\}$ ולכן $B = \left\{ f(a) \middle| a \in A \right\}$.

תרגיל 11

א.

$$x \in f^{-1}\left[D_1 \cup D_2\right] \leftrightarrow f(x) \in D_1 \cup D_2 \leftrightarrow f(x) \in D_1 \vee f(x) \in D_2 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x \in f^{-1}\left[D_1\right] \vee x \in f^{-1}\left[D_2\right] \leftrightarrow x \in f^{-1}\left[D_1\right] \cup f^{-1}\left[D_2\right]$$

כל המעברים נובעים ישירות מההגדרות.

ב.

$$x \in f^{-1}\left[D_1 \cap D_2\right] \leftrightarrow f(x) \in D_1 \cap D_2 \leftrightarrow f(x) \in D_1 \wedge f(x) \in D_2 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x \in f^{-1}\left[D_1\right] \wedge x \in f^{-1}\left[D_2\right] \leftrightarrow x \in f^{-1}\left[D_1\right] \cap f^{-1}\left[D_2\right]$$

כל המעברים נובעים ישירות מההגדרות.

ג.

דוגמא נגדית

נניח ש $X = \{1,2\}, Y = \{1,2,3\}$ ונגדיר פונקציה $f : X \to Y$ כך שלכל $x \in X$ מתקיים
$f(x) = x$ כעת נניח ש $C = \{1\}$ ואז $C^c = \{2\}$.

$f\left[C^c\right] = \{2\} \neq \{2,3\} = \left(f\left[C\right]\right)^c$.

ד.

$$x \in f^{-1}\left[D^c\right] \leftrightarrow f(x) \in D^c \leftrightarrow f(x) \notin D \leftrightarrow x \notin f^{-1}\left[D\right] \leftrightarrow x \in \left(f^{-1}\left[D\right]\right)^c$$

כל המעברים נובעים ישירות מההגדרות.

ה.

דוגמא נגדית

נניח ש $X = \{1,2\}, Y = \{1\}$ $X = \{1,2\}, Y = \{1,2,3\}$ ונגדיר פונקציה $f : X \to Y$ כך שלכל
$x \in X$ מתקיים $f(x) = 1$ נניח ש $C_1 = \{1,2\}, C_2 = \{2\}$.

$f\left[C_1 \setminus C_2\right] = \{1\} \neq \varnothing = f\left[C_1\right] \setminus f\left[C_2\right]$.

ו.

$$x \in f^{-1}\left[D_1 \setminus D_2\right] \leftrightarrow f(x) \in D_1 \setminus D_2 \leftrightarrow f(x) \in D_1 \wedge f(x) \notin D_2 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x \in f^{-1}\left[D_1\right] \wedge x \notin f^{-1}\left[D_2\right] \leftrightarrow x \in f^{-1}\left[D_1\right] \setminus f^{-1}\left[D_2\right]$$

כל המעברים נובעים ישירות מההגדרות.

תרגיל 12

א.

$$x \in \left(g \circ f\right)^{-1}\left[D\right] \leftrightarrow \left(g \circ f\right)(x) \in D \leftrightarrow g\left(f\left(x\right)\right) \in D \leftrightarrow f(x) \in g^{-1}\left[D\right] \leftrightarrow x \in f^{-1}\left[g^{-1}\left[D\right]\right]$$

ב.

$$\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ \left(g \circ f\right)\left(a\right) = \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)\left(g\left(f\left(a\right)\right)\right) = f^{-1}\left(f\left(a\right)\right) = a$$

באותו אופן

$\left(g \circ f\right) \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)\left(a\right) = a$.