אלגברה לינארית 2 ־ משפטים וטענות

סוכם ע"פ הרצאות פרופ' מ.קריבלביץ'

1 פולינומים

הגדרה 1.1 (פולינום) יהי F שדה, פולינום הינו ביטוי מהצורה $\sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$, כאשר $\alpha_i \in F$ ו־x הינו משתנה.

הגדרה 1.2 (מעלת הפולינום) נניח כי קיים $0 \le i \le n$ כך ש־$\alpha_i \neq 0$, במקרה זה נסמן את מעלת הפולינום $deg(p) = max\{0 \le i \le n | \alpha_i \neq 0\}$. אחרת, אם $p(x) = 0$ נסמן $deg(p) = \infty$.

הגדרה 1.3 יהי $p(x)$ פולינום ממעלה $k \ge 0$, המקדם α_k נקרא המקדם המוביל של $p(x)$. פולינום אשר המקדם המוביל שלו הינו 1 נקרא פולינום מתוקן.

משפט 1.4 נסמן ב־ $F[x]$ ($F_n[x]$) את אוסף הפולינומים במשתנה x (ממעלה לכל היותר n) עם מקדמים בשדה F. אזי $F[x]$ יחד עם פעולות החיבור והכפל בסקלר הוא מרחב וקטורי ממימד אינסופי (מימד n).

טענה 1.5 לכל שני פולינומים $p(x), q(x) \in F[x]$ מתקיים כי: $\deg(pq) = \deg(p) + \deg(q)$.

משפט 1.6 יהיו $f, g \in F[x]$ פולינומים כאשר $g(x) \neq 0$. אזי קיימים פולינומים יחידים $q(x), r(x) \in F[x]$ כך שמתקיים:

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \ \& \ \deg(r) < \deg(q)$$

הגדרה 1.7 אם $f, g \in F[x]$ פולינומים כך שקיים $q(x) \in F[x]$ עבורו $f = qg$, נאמר כי f מתחלק ב־g ו־g מחלק את f.

1.1 שורשים של פולינומים

טענה 1.8 $\lambda \in F$ הוא שורש של פולינום $p(x) \in F[x]$ אם ורק אם $p(x)$ מתחלק ב־$(x - \lambda)$.

הגדרה 1.9 (ריבוי של שורש) יהי $0 \neq p(x) \in F[x]$ פולינום ונניח כי $\lambda \in F$ הינו שורש של $p(x)$. המספר השלם $s \ge 1$ הגדול ביותר עבורו $p(x)$ מתחלק ב־$(x - \lambda)^s$ נקרא הריבוי של λ כשורש של $p(x)$.

משפט 1.10 יהי $p(x) \in F[x]$ פולינום ממעלה $n \ge 1$ ו־ $\lambda_1, ..., \lambda_k \in F$ שורשים שונים של $p(x)$. אזי $p(x)$ מתחלק ב־$(x - \lambda_1)...(x - \lambda_k)$.

מסקנה 1.11 לכל פולינום $p(x)$ ממעלה $n \ge 1$ יש לכל היותר n שורשים.

טענה 1.12 (תרגיל) אם $r \in \mathbb{Q}$ שורש של פולינום $f(x) = a_n x^n + .. + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ ונסמן $r = \frac{p}{q}$ כאשר $p, q \in \mathbb{Z}$ ו־ $\gcd(p, q) = 1$ אזי מתקיים כי q מחלק את a_n ו־p מחלק את a_0.

1.2 אידאלים של פולינומים

הגדרה 1.13 יהי F שדה. קבוצת פולינומים $I \subseteq F[x]$ נקראת אידיאל ב־$F[x]$ אם מתקיים:

1. $0 \in I$.
2. לכל $f_1, f_2 \in I$ מתקיים $f_1 + f_2 \in I$.
3. לכל $f \in I$ ולכל $g(x) \in F[x]$ מתקיים: $fg \in I$.

טענה 1.14 יהיו $f_1, ..., f_k \in F[x]$ אזי הקבוצה המוגדרת על ידי: $I = \{\sum_{i=1}^k g_i f_i | \forall 1 \le i \le k \ g_i \in F[x]\}$ הינה אידיאל ב־$F[x]$. הקבוצה I כנ"ל נקראת האידיאל שנוצר על ידי $f_1, ..., f_k$ ומסומנת $I =< f_1, ..., f_k >$.

משפט 1.15 (כל אידיאל בחוג הפולינומים הוא ראשי) יהי $I \subseteq F[x]$ אידיאל. אזי קיים פולינום $f(x) \in F[x]$ כך ש־ $I =< f >$.

הערה: נניח כי $I \subseteq F[x]$ אידיאל ו־ $I =< f_1 >=< f_2 >$. אז f_1, f_2 הם כפולות אחד של השני, כלומר קיים $0 \neq \lambda \in F$ כך ש־$f_1 = \lambda f_2$.

1.3 מחלקים משותפים

הגדרה 1.16 $f_1, f_2 \in F[x]$ פולינומים, פולינום $g(x) \in F[x]$ נקרא מחלק משותף מירבי של f_1, f_2 אם מתקיים:

1. g מחלק את f_1 ואת f_2.
2. אם $h \in F[x]$ מחלק את f_1, f_2 אזי h מחלק את g.

סימון: קבוצת כל המחלקים המשותפים של $f_1, f_2 \in F[x]$ מסומנת ב־ $\gcd(f_1, f_2) \subseteq F[x]$

משפט 1.17 יהיו $f_1, f_2 \in F[x]$ אזי $g \in F[x]$ מקיים $< g >=< f_1, f_2 >$ אם ורק אם $g \in \gcd(f_1, f_2)$. כלומר: $\gcd(f_1, f_2) = \{g :< g >=< f_1, f_2 >\}$.

הגדרה 1.18 $g \in F[x]$ הוא מחלק משותף מקסימלי של $f_1, .., f_n \in F[x]$ אם מתקיים:

1. g מחלק את $f_1, ..., f_n$.
2. אם $h \in F[x]$ מחלק את $f_1, ..., f_n$ אזי h מחלק את g.

משפט 1.19 לכל $f_1, ..., f_n \in F[x]$ קיים:
$\gcd(f_1, ..., f_n) = \{g \in F[x] :< g >=< f_1, ..., f_n >\}$

1.4 פולינומים אי פריקים ופירוק לפולינומים אי־פריקים

הגדרה 1.20 פולינום $p \in F[x]$ נקרא אי־פריק אם:

1. $\deg(p) \ge 1$.
2. אם קיימים פולינומים $f, g \in F[x]$ כך ש־$p = fg$ אזי g או f הוא קבוע $\neq 0$ (כלומר $\deg(g) = 0$ או $\deg(p) = 0$).

משפט 1.21 (קיום ויחידות פירוק לגורמים אי פריקים) יהי $p(x)\in F[x]$ פולינום כך ש־$\deg(p)\ge 1$, אזי קיימים פולינומים אי־פריקים $p_1,...,p_n\in F[x]$ כך ש־ $p=p_1p_2...p_n$. יתרה מזאת אם $p=p_1p_2...p_n$ וכן $p=q_1q_2...q_m$ כאשר $p_1,...,p_n,q_1,...,q_m\in F[x]$ אזי $m=n$ וקיימת תמורה $\sigma\in S_n$ וקבועים $\lambda_1,...,\lambda_n\in F$ כך ש־ $\forall 1\le i\le n: p_i=\lambda_i q_{\sigma(i)}$.

מסקנה: יהי $f\in F[x]$ פולינום ממעלה 1 לפחות. אזי קיים ייצוג יחיד $f=\lambda p_1...p_n$ כאשר $p_1,...,p_n\in F[x]$ אי ־פריקים ומתוקנים ו־$\lambda\in F$.

משפט 1.22 יהי $p(x)\in F[x]$ פולינום ממעלה $n\ge 1$ ונניח כי $\lambda_1,...,\lambda_k\in F$ הם שורשים שונים של $p(x)$ עם ריבויים $s_1,...,s_k$ בהתאמה. אזי $p(x)$ מתחלק בפולינום $(x-\lambda_1)^{s_1}...(x-\lambda_k)^{s_k}$.

משפט 1.23 (המשפט היסודי של האלגברה) יהי $p(x)\in\mathbb{C}[x]$ פולינום ממעלה 1 לפחות. אזי ל־p קיים שורש $\lambda\in\mathbb{C}$.

מסקנה: הפולינומים האי־פריקים ב־$\mathbb{C}[x]$ הם בדיוק הפולינומים הליניאריים.

טענה 1.24 הפולינומים האי־פריקים ב־$\mathbb{R}[x]$ הם בדיוק פולינומים ליניאריים ופולינומים ריבועיים ללא שורשים (ממשיים).

2 ערכים עצמיים וליכסון

הגדרה 2.1 יהיה V מרחב וקטורי n מימדי ($n\ge 1$) מעל שדה F. העתקה ליניארית $T:V\to V$ נקראת **לכסינה** אם קיים בסיס B של V בו מטריצת הייצוג $[T]_B$ היא מטריצה אלכסונית.

הגדרה 2.2 (מקבילה למטריצות) מטריצה $A\in M_n(F)$ נקראת ניתנת ללכסון או לכסינה אם A דומה למטריצה אלכסונית. כלומר אם קיימת מטריצה הפיכה $P\in M_n(F)$ ומטריצה אלכסונית D כך שמתקיים $D=P^{-1}AP$.

משפט 2.3 יהי V מרחב וקטורי ממימד $n\ge 1$ ותהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית. T לכסינה אם ורק אם קיים בסיס סדור $B=\{v_1,...,v_n\}$ וקבועים $\lambda_1,...,\lambda_n\in F$ כך שמתקיים: $\forall 1\le i\le n: Tv_i=\lambda_i v_i$.

הגדרה 2.4 נניח כי $T(v)=\lambda v$ עבור $\lambda\in F$ ו־ $0\ne v\in V$. אזי $\lambda\in F$ נקרא ערך עצמי של T ו־$v\in V$ נקרא וקטור עצמי של T השייך לערך עצמי λ.

טענה 2.5 תהי $T:V\to V$ ה"ל, כאשר V מ"ו מעל שדה F, ויהי $\lambda\in F$ ערך עצמי של T, אזי הקבוצה $V_\lambda=\{v\in V: Tv=\lambda v\}$ הינה תת מרחב של V. קבוצה זאת נקראת תת המרחב העצמי של T השייך לערך עצמי λ.

משפט 2.6 (ו"ע השייכים לע"ע שונים) תהי $T:V\to V$ ה"ל (V מ"ו n מימדי מעל F). נניח כי $\lambda_1,...,\lambda_k\in F$ הם ע"ע שונים של T ו־ $v_1,...,v_k$ הם ו"ע השייכים לערכים העצמיים הנ"ל בהתאמה, אזי הקבוצה $x=\{v_1,...,v_k\}$ בת"ל ב־V.

מסקנה: אם $\dim V=n$ ולהעתקה ליניארית $T:V\to V$ יש n ע"ע שונים, אזי T לכסינה. (זהו תנאי מספיק אך לא הכרחי).

טענה 2.7 תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית, B בסיס של V ו־ $A=[T]_B\in M_n(F)$ מטריצת הייצוג של T לפי בסיס B. אזי ל־T ול־A יש את אותם ערכים עצמיים ויתרה מזאת $v\in V$ הוא ו"ע של T השייך לע"ע λ אם ורק אם הווקטור $[v]_B\in F^n$ הוא ו"ע של A השייך לע"ע λ.

מסקנה 2.8 למטריצות דומות אותם ערכים עצמיים.

משפט 2.9 $T:V\to V$ ו־$A=[T]_B\in M_n(F)$ מטריצת הייצוג של T על פי בסיס B. אזי T לכסינה אם ורק אם A לכסינה.

2.1 הפולינום האופייני של העתקה ליניארית/מטריצה

טענה 2.10 תהי $A\in M_n(F)$ מטריצה, אזי $\lambda\in F$ הוא ע"ע של A אם ורק אם $\det(\lambda I-A)=0$.

הגדרה 2.11 תהי $A\in M_n(F)$ מטריצה אזי המטריצה $B=tI-A$ (t משתנה) נקראת המטריצה האופיינית של A. הפונקציה $\det(tI-A)$ נקראת **הפולינום האופייני** של A ומסומנת ב־$P_A(t)$.

טענה 2.12 תהי $A\in M_n(F)$ מטריצה אז הביטוי $P_A(t)$ הינו פולינום מתוקן ממעלה n במשתנה t.

מסקנה מההגדרה: תהי $A\in M_n(F)$ מטריצה אזי $\lambda\in F$ הוא ע"ע של A אם ורק אם λ הוא שורש של הפולינום האופייני $P_A(t)$.

משפט 2.13 למטריצות דומות יש את אותו הפולינום האופייני.

הגדרה 2.14 תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית. הפולינום האופייני של T המסומן ב־ $P_T(t)$ הוא הפולינום האופייני של מטריצת הייצוג של T על פי בסיס כלשהו של V.

2.2 פולינום אופייני וליכסון

משפט 2.15 (תנאי הכרחי לליכסון) אם העתקה ליניארית $T:V\to V$ לכסינה, אז הפולינום האופייני $P_T(t)$ מתפרק לגורמים ליניאריים.

הגדרה 2.16 תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית של מ"ו V מעל שדה F. יהי $\lambda\in F$ ערך עצמי של T.

1. **הריבוי האלגברי** של λ הוא הריבוי של λ כשורש של הפולינום האופייני $P_T(t)$.
2. **הריבוי הגיאומטרי** של λ הוא המימד של המרחב העצמי V_λ.

משפט 2.17 תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית ו־$\lambda\in F$ ערך עצמי של T, אזי הריבוי הגיאומטרי של λ אינו עולה על ריבויו האלגברי.

משפט 2.18 (תנאי מספיק והכרחי לליכסון) תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית, אזי T לכסינה אם ורק אם:

1. הפולינום האופייני $P_T(t)$ מתפרק לגורמים ליניאריים.
2. לכל ע"ע $\lambda\in F$ של T הריבוי הגיאומטרי של λ שווה לריבוי האלגברי.

2.3 אלגוריתם הליכסון

נתונה: $T:V\to V$ העתקה ליניארית.
המטרה: להכריע האם T לכסינה, ובמידה וכן למצוא בסיס מלכסן.
השיטה:

1. מצא את הפולינום האופייני $P_T(t)$.
2. אם $P_T(t)$ לא מתפרק לגורמים ליניאריים, עצרי! T אינה לכסינה :(
3. נניח כי $P_T(t)=(t-\lambda_1)^{s_1}...(t-\lambda_k)^{s_k}$ ($\lambda_i\ne\lambda_j$ עבור $i\ne j$), עבור $1\le i\le k$ מצא את המימד של המרחב העצמי V_{λ_i} ובסיסו B_i.
4. אם קיים $1\le i\le k$ עבורו $\dim V_{\lambda_i}<s_i$, עצרי! T אינה לכסינה :(
5. אחרת ($s_i=\dim V_{\lambda_i}$) הגדירו $B=\bigcup_{i=1}^k B_k$, זהו הבסיס המלכסן :)

2.4 שילוש של העתקות מרוכבות

תזכורת: מטריצה $A\in M_n(F)$ נקראת משולשית עליונה אם מתקיים $\forall 1\le i,j\le n: j<i \Rightarrow a_{ij}=0$.

טענה 2.19 אם $A\in M_n(F)$ משולשית עליונה עם הערכים $\lambda_1,...,\lambda_n$ באלכסון אזי הפולינום האופייני של A הינו $P_A(t)=(t-\lambda_1)...(t-\lambda_n)$.

הגדרה 2.20 $T:V\to V$ העתקה ליניארית, בסיס B של V נקרא **בסיס משלש** אם מטריצת הייצוג $[T]_B$ הינה משולשית עליונה.

טענה 2.21 בסיס B של מ"ו V משלש את ההעתקה $T:V\to V$ אם ורק אם $Tv_i\in sp\{v_1,...,v_i\}$לכל $1\le i\le n$.

משפט 2.22 יהי V מרחב וקטורי n מימדי ($n\ge 1$) מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$ ו־T העתקה לינארית. אזי ל־T קיים בסיס משלש.

3 הצבה של מטריצה/העתקה ליניארית לתוך פולינום

הגדרה 3.1 תהי $A\in M_n(F)$ מטריצה ($T:V\to V$ ה"ל) ויהי $p(t)=\sum_{i=0}^m \alpha_i t^i\in F[t]$ פולינום.
ההצבה $P(A)$ ($P(T)$) מוגדרת על ידי:
$P(A)=\sum_{i=0}^m \alpha^i A^i$ ($P(T)=\sum_{i=0}^m \alpha^i T^i$).
כאשר $A^0=I_n$ ($T^0=Id$) $A^i=A...A$ ו־ ($T^i=T\circ...\circ T$).

הגדרה 3.2 מטריצה A (העתקה T) מאפסת פולינום $p(t)$ אם $P(A)=0$ ($P(T)=0$).

טענה 3.3 אם $p_1,p_2\in F[t]$ ו־ $A\in M_n(F)$ אזי מתקיים $p_1(A)p_2(A)=p_2(A)p_1(A)$.

טענה 3.4 $T:V\to V$ העתקה ליניארית במרחב וקטורי מעל שדה F, B בסיס של V. אם $p(t)\in F[t]$ פולינום אזי: $[p(T)]_B=p([T]_B)$.

טענה 3.5 תהי $D=\text{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)\in M_n(F)$ מטריצה אלכסונית ו־$p(t)\in F[t]$ פולינום. אזי: $p(D)=\text{diag}(p(\lambda_1),...,p(\lambda_n))$.

טענה 3.6 נניח כי $A\in M_n(F)$ מטריצה לכסינה, כלומר קיימת $D=\text{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)$ ו־Q הפיכה כך ש־$D=Q^{-1}AQ$. יהי $p(t)$ פולינום, אזי: $p(A)=Qp(D)Q^{-1}$.

משפט 3.7 (קיילי־המילטון, למטריצות) תהי $A\in M_n(F)$ מטריצה, ויהי $P_A(t)\in F[t]$ הפולינום האופייני של A אזי מתקיים $P_A(A)=0$. (באופן דומה גם להעתקות).

3.1 הפולינום המינימלי

סימון: בהינתן מטריצה $A\in M_n(F)$ נסמן $I_A=\{p(t)\in F[t]: p(A)=0\}$.

טענה 3.8 לכל $A\in M_n(F)$ הקבוצה $I_A\subseteq F[t]$ היא אידיאל.

הגדרה 3.9 תהי $A\in M_n(F)$ מטריצה. הפולינום המתוקן היחיד שיוצר את האידיאל I_A נקרא **הפולינום המינימלי** של A ומסומן ב־$M_A(t)$.

טענה 3.10 תהי $A\in M_n(F)$ מטריצה. נניח כי קיים שלם חיובי k כך ש־$A^k=0$ אז $A^n=0$.

טענה 3.11 תהי $D=\text{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)\in M_n(F)$ אזי $M_A(t)=(t-\lambda_{i1})...(t-\lambda_{ik})$ כאשר $\lambda_{i1},...,\lambda_{ik}$ הם כל הערכים השונים מבין $\lambda_1,...,\lambda_n$.

טענה 3.12 אם מטריצות $A,B\in M_n(F)$ דומות אזי $I_A=I_B$.
מסקנות מהטענה:

1. תהיינה $A,B\in M_n(F)$ מטריצות דומות, אזי $M_A(t)=M_B(t)$.
2. נניח כי מטריצה $A\in M_n(F)$ לכסינה אזי $M_A(t)=(t-\lambda_1)...(t-\lambda_k)$ כאשר $\lambda_1,...,\lambda_k$ כל הע"ע השונים של A.
3. נניח כי למטריצה $A\in M_n(F)$ יש n ע"ע שונים $\lambda_1,..,\lambda_n\in F$. אזי $M_A(t)=P_A(t)=(t-\lambda_1)...(t-\lambda_k)$.

3.1.1 מציאת הפולינום המינימלי

משפט 3.13 תהי $A\in M_n(F)$ מטריצה ויהי $\lambda\in F$ ע"ע של A אזי $t-\lambda$ מחלק את הפולינום המינימלי $M_A(t)$.
מסקנה: לפולינום האופייני $P_A(t)$ ולפולינום המינימלי $M_A(t)$ של מטריצה A אותם גורמים לינאריים.
למעשה נכונה טענה כללית יותר: ל־$P_A(t)$ ול־$M_A(t)$ אותם גורמים אי־פריקים.

3.1.2 הפולינום המינימלי של העתקה ליניארית

סימון: $T:V\to V$ ה"ל של מ"ו V מעל שדה F, נסמן $I_T=\{p(t)\in F[t]: p(T)=0\}$.

טענה 3.14 באופן דומה למקרה המטריצי, לכל T ה"ל, הקבוצה I_T הינה אידיאל ב־$F[t]$.

הגדרה 3.15 בהינתן $T:V\to V$ ה"ל, הפולינום המתוקן היחיד שיוצר את האידיאל I_T נקרא הפולינום המינימלי של T ומסומן ב־$M_T(t)$.

טענה 3.16 תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית ו־B בסיס של V. תהי $A=[T]_B$ מטריצת הייצוג של T לפי בסיס B. אזי $I_A=I_T$ (ולכן גם למטריצת הייצוג ולההעתקה המיוצגת אותו פולינום מינימלי).

מסקנות: כמו במקרה המטריצי.

3.1.3 פולינום מינימלי וליכסון

משפט 3.17 תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית של מ"ו V מעל שדה F. אזי T לכסינה אם ורק אם הפולינום המינימלי $M_T(t)$ מתפרק לגורמים ליניאריים שונים, כלומר $M_T(t)=(t-\lambda_1)...(t-\lambda_k)$ כאשר $\lambda_i\ne\lambda_j$ עבור כל $1\le i\ne j\le k$.

4 צורת ז'ורדן

הגדרה 4.1 יהי F שדה, נסמן $J_n=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$, **בלוק ז'ורדן נילפוטנטי** מסדר n.

טענה 4.2 לכל $k\ge 1$ שלם מתקיים:

$$(J_n)^k=\begin{bmatrix} \overbrace{0....0}^{k} & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

מסקנה: אם $A=J_n$ אז $P_A(t)=M_A(t)=t^n$

הגדרה 4.3 מטריצה $A\in M_n(F)$ נקראת נילפוטנטית מאינדקס s אם $A^s=0$ אבל $A^k\ne 0$ לכל $k<s$.

הגדרה 4.4 יהי $\lambda \in F$ המטריצה
$$J_n(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$
נקראת בלוק ז'ורדן מסדר n השייך ל־λ. נשים לב שנוכל לכתוב: $J_n(\lambda) = \lambda I_n + J_n$.

טענה 4.5 יהי $A = J_n(\lambda) \in M_n(F)$ בלוק ז'ורדן מסדר n השייך ל־$\lambda \in F$ אזי $P_A(t) = M_A(t) = (t-\lambda)^n$.

טענה 4.6 אם $A = J_n(\lambda) \in M_n(F)$ אזי $A^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} (J_n)^i$.

הערה: אם בטענה הנ"ל $k \geq n$ אז כיוון ש־ $J_n^k = 0$ מקבלים $A^k = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} (J_n)^i$.

הגדרה 4.7 מטריצת ז'ורדן הינה מטריצת בלוקים אלכסונית בה כל בלוק באלכסון הוא בלוק ז'ורדן:

$$G = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

4.1 תכונות של מטריצת ז'ורדן

תהי $G = \mathrm{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), ..., J_{n_k}(\lambda_k))$ מטריצת ז'ורדן, אזי:

1. G משולשית עליונה.
2. **הפולינום האופייני של** G: $P_G(t) = (t-\lambda_1)^{n_1} ... (t-\lambda_k)^{n_k}$.
3. **הפולינום המינימלי של** G: באופן כללי אם $A = \mathrm{diag}(B_1, ..., B_k)$ מטריצת בלוקים אלכסונית, אזי $M_A(t) = \mathrm{lcm}(M_{B_1}(t), ..., M_{B_k}(t))$. זה נכון גם עבור G.
4. הערכים העצמיים של G הינם $\lambda_1, ..., \lambda_k$.
5. הריבוי האלגברי של הערך העצמי λ_i הינו סכום סדרי הבלוקים השייכים ל־λ_i.

טענה 4.8 (תרגול) תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$

1. הריבוי של λ כשורש של הפולינום המינימלי הינו גודל הבלוק הגדול ביותר השייך ל־λ בצורת ז'ורדן של A.
2. מספר הבלוקים עם ערך λ בגודל לפחות k בצורת ז'ורדן של A הינו $\mathrm{rk}(A-\lambda I)^{k-1} - \mathrm{rk}(A-\lambda I)^k$.

טענה 4.9 תהי G מטריצת ז'ורדן, אזי הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי λ_i של G, הינו מספר הבלוקים השייכים ל־λ_i.

4.2 בסיס ז'ורדן וצורת ז'ורדן של העתקות ומטריצות

הגדרה 4.10 $T : V \to V$ העתקה ליניארית של מ"ו n מימדי V מעל שדה F. בסיס B של V הוא **בסיס ז'ורדן** עבור T אם מטריצת הייצוג $G = [T]_B$ היא מטריצת ז'ורדן.

משפט 4.11 (ז'ורדן) תהי $T : V \to V$ העתקה ליניארית של מרחב וקטורי n מימדי V ($n \geq 1$) מעל $\mathbb{C}$.
אזי ל־T קיים בסיס ז'ורדן. יתרה מזאת, כל שתי צורות ז'ורדן של T זהות זו לזו עד כדי שינוי סדר בלוקי ז'ורדן באלכסון.

משפט 4.12 (צורת ז'ורדן למטריצות) $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה אז A דומה למטריצת ז'ורדן G. כלומר קיימת מטריצת ז'ורדן G ומטריצה הפיכה P כך ש־ $A = P^{-1}GP$. יתרה מזאת צורת ז'ורדן של A נקבעת ביחידות ע"י A עד כדי שינוי סדר הבלוקים.

הערות:

1. הכרחי לקיום צורת ז'ורדן ־ $P_T(t)$ מתפרק לגורמים ליניאריים. ניתן לטעון קיום ויחידות של צורת ז'ורדן מעל כל שדה F בו כל פולינום (ממעלה ≥ 1) מתפרק לגורמים ליניאריים.
2. $\mathbb{R}$ אינו שדה סגור אלגברית, לכן לא תמיד קיימת צורת ז'ורדן מעל $\mathbb{R}$. יחד עם זאת אם $T : V \to V$ ה"ל כך ש־$P_T(t)$ מתפרק לגורמים ליניאריים, אזי ל־T קיימת צורת ז'ורדן וצורה זו יחידה עד כדי סדר הבלוקים.

4.2.1 שימושים של משפט ז'ורדן

משפט 4.13 תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה אזי A דומה ל־A^t.

4.3 מציאת בסיס ז'ורדן של מטריצה

בהינתן $A \in M_n(\mathbb{C})$ נרצה למצוא בסיס ז'ורדן עבור A.

1. מוצאים $P_A(t)$ ו־$M_A(t)$, וערכים עצמיים של A.
2. באמצעות הריבוי האלגברי והגיאומטרי וכן הריבוי של λ כשורש של הפולינום המינימלי, מוצאים את צורת ז'ורדן של A.
3. עתה מספיק למצוא בסיס ז'ורדן עבור כל ע"ע בנפרד ולבסוף לאחד את הבסיסים.

4.3.1 מציאת בסיס ז'ורדן עבור ערך עצמי λ

נניח כי למטריצה $A \in M_n(\mathbb{C})$ ערך עצמי λ, והבלוקים השייכים ל־λ הינם $J_{n_1}(\lambda), ..., J_{n_k}(\lambda)$.
נרצה למצוא בסיס ז'ורדן B_λ המתאים לע"ע הנ"ל.

1. נגדיר $B = A - \lambda I$.
2. נמצא עתה את n_1 הוקטורים הראשונים בבסיס B_λ.
3. נשים לב כי הוקטורים $v_1, v_2, ..., v_{n_1} \in B_\lambda$ צריכים לקיים את הקשר:

$$\begin{aligned} Bv_2 &= v_1 \qquad (\star) \\ Bv_3 &= v_2 \\ &\vdots \\ Bv_{n_1} &= v_{n_1-1} \end{aligned}$$

וגם:

$$\begin{aligned} v_2 &\in \ker B^2 \setminus \ker B \qquad (\star\star) \\ v_3 &\in \ker B^3 \setminus \ker B^2 \\ &\vdots \\ v_{n_1} &\in \ker B^{n_1} \setminus \ker B^{n_1-1} \end{aligned}$$

4. נבחר וקטור $v_{n_1} \in \ker B^{n_1} \setminus \ker B^{n_1-1}$.
5. עתה באמצעות $(\star)$ ניתן למצוא את שאר הוקטורים.
6. נחזור על התהליך עבור שאר הבלוקים, כאשר נוודא שאנו בוחרים וקטורים שאינם תלויים ליניארית בוקטורים שכבר בחרנו עבור הבלוקים הקודמים.

5 מרחבי מכפלה פנימית

5.1 מכפלה פנימית ממשית

הגדרה 5.1 (מעל $\mathbb{R}$) יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{R}$, פונקציה $f : V \times V \to \mathbb{R}$ (נסמן $f(u,v) =< u,v >$) נקראת מכפלה פנימית על V אם:

1. סימטריות: לכל $u,v \in V$ קיים־ $< u,v >=< v,u >$.
2. ליניאריות: לכל $u,v,w \in V$ קיים־ $< u+v,w >=< u,w > + < v,w >$.
3. הומוגניות: לכל $u,v \in V$ ולכל $\lambda \in \mathbb{R}$ קיים־ $< \lambda u,v >= \lambda < u,v >$.
4. חיוביות: לכל $v \in V$ קיים־ $0 \geq < v,v >$ ויתרה מזאת $< v,v >= 0 \Leftrightarrow v = 0$.

משפט 5.2 (אי שוויון קושי־שוורץ) יהי V מ"ו ממשי עם מכפלה פנימית $<,>$, אזי לכל $a,b \in V$ קיים:

$$< a,b >^2 \leq < a,a >< b,b >$$

או בניסוח שקול דרך נורמה $< u,v > \leq ||u|| \cdot ||v||$.

הגדרה 5.3 הנורמה של $v \in V$, המסומנת ב־$||v||$, מוגדרת על ידי $||v|| = \sqrt{< v,v >}$.

5.2 מכפלה פנימית מרוכבת

הגדרה 5.4 V מ"ו מעל שדה $\mathbb{C}$ ו־$f : V \times V \to \mathbb{C}$ (נסמן $f(u,v) =< u,v >$), f נקראת מכפלה פנימית על V אם:

1. הרמיטיות: לכל $u,v \in V$ מתקיים כי $< u,v >=< \overline{v,u} >$.
2. ליניאריות: לכל $u,v,w \in V$ מתקיים $< u+v,w >=< u,w > + < v,w >$.
3. הומוגניות: לכל $u,v \in V$ ו־$\lambda \in \mathbb{C}$ מתקיים $< \lambda u,v >= \lambda < u,v >$ (וכן $< u,\lambda v >= \overline{\lambda} < u,v >$).
4. חיוביות: לכל $v \in V$ קיים־ $0 \geq < v,v >$ ויתרה מזאת $< v,v >= 0 \Leftrightarrow v = 0$.

משפט 5.5 (אי־שוויון קושי שוורץ) כמו במקרה הממשי.

הגדרה 5.6 (מטריצה של מכפלה פנימית) יהי V מ"ו n מימדי עם מכפלה פנימית $<,>$ ו־$B = \{v_1,...,v_n\}$ בסיס סדור של V.
נגדיר את **המטריצה של המכפלה הפנימית** $A \in M_n(\mathbb{C})$ באופן הבא: $(A)_{ij} =< v_i,v_j >$.

טענה 5.7 אם $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצת מכפלה פנימית, אזי $A^* = A$.

טענה 5.8 אם $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצת מכפלה פנימית המתאימה לבסיס B, אזי $< u,v >= [u]_B^t A \overline{[v]}_B$.

הגדרה 5.9 מטריצה $[a_{ij}] = A \in M_n(\mathbb{C})$ נקראת **חיובית לחלוטין** (מוגדרת חיובית) אם:

1. $A^* = A$
2. לכל $\alpha_1,...,\alpha_n \in \mathbb{C}$ קיים $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\alpha}_j a_{ij}$ מס' ממשי אי שלילי וכן הביטוי הנ"ל מתאפס אם ורק אם $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$

הגדרה 5.10 מטריצה $[a_{ij}] = A \in M_n(\mathbb{R})$ נקראת **חיובית לחלוטין** (מוגדרת חיובית) אם:

1. $A^t = A$
2. לכל $\alpha_1,...,\alpha_n \in \mathbb{R}$ קיים $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j a_{ij}$ מס' ממשי אי שלילי וכן הביטוי הנ"ל מתאפס אם ורק אם $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$

הגדרה 5.11 (נורמה) מוגדרת באותו אופן כמו במקרה הממשי.

תכונות של נורמה: יהי V ממ"פ, ו־$||\,||$ נורמה על V

1. ליניאריות: לכל $v \in V$ ולכל סקלר λ מתקיים $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$.
2. חיוביות: $0 \geq ||v||$ והשוויון מתקיים אם ורק אם $v = 0$.
3. אי־שוויון משולש: $||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$.

5.3 אורתוגונליות

הגדרה 5.12 יהי V ממ"פ. וקטורים $u,v \in V$ נקראים אורתוגונליים זה לזה אם $< u,v >= 0$.

הגדרה 5.13 (משלים אורתוגנלי) יהי V ממ"פ, תהיה $U \subseteq V$ קבוצת וקטורים. המשלים האורתוגונלי של U המסומן ב־$U^\perp$ היא קבוצת וקטורים ב־V המוגדרת על ידי: $U^\perp = \{v \in V : \forall u \in U \ \ < u,v >= 0\}$.

משפט 5.14 (תכונות של המשלים האורתוגונלי) יהי V ממ"פ ו־$U \subseteq V$ תת קבוצה. אזי:

1. $U^\perp$ הוא תת מרחב של V.
2. אם $u \in U \cap U^\perp$ אזי $u = 0$.
3. $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ (אם Vממימד סופי ו־U תת מרחב אזי קיים שוויון).

הגדרה 5.15 יהי V ממ"פ, קבוצת וקטורים $K \subseteq V$ נקראת

הגדרה 5.16 קבוצה אורתוגונלית אם:

1. $0 \notin K$
2. לכל $u \neq v \in K$ קיים $< u,v >= 0$.

קבוצה אורתונורמלית אם K קבוצה אורתוגונלית וכן $||v|| = 1$ לכל $v \in K$.

משפט 5.17 יהי V ממ"פ ותהי $K \subseteq V$ קבוצה אורתוגונלית, אזי K היא קבוצה בלתי תלויה ליניארית.

הגדרה 5.18 בסיס B של ממ"פ V נקרא בסיס אורתוגונלי (אורתונורמלי) אם B קבוצה אורתוגונלית (אורתונורמלית).

משפט 5.19 יהי V ממ"פ. קבוצה אורתוגונלית סופית K היא בסיס אורתוגונלי אם ורק אם K קבוצה אורתוגונלית מקסימלית לפי הכלה (כלומר לכל וקטור $v \in V \setminus K$ הקבוצה $K \cup \{v\}$ אינה אורתוגונלית).

משפט 5.20 יהי V ממ"פ n מימדי ויהי $B = \{v_1,...,v_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V.

1. לכל $u \in V$ מתקיים $u = \sum_{i=1}^n < u,v_i > v_i$.
2. לכל $u,w \in V$ מתקיים $< u,w >= \sum_{i=1}^n < u,v_i >< \overline{w,v_i} >$.
3. לכל $u \in V$ מתקיים $||u|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |< u,v_i >|^2}$.

משפט 5.21 (היטל אורתוגונלי) יהי V ממ"פ ויהי $U \subseteq V$ תת מרחב לא טריוויאלי של V. נניח כי $v \in V \setminus U$.

1. קיים $u_0 \in U$ כך ש־ $(v-u_0) \perp u$
2. וקטור u_0 כנ"ל הוא יחיד. u_0 נקרא ההיטל האורתוגנלי של v על U.

3. לכל וקטור $u_0 \neq u \in U$ מתקיים כי $||v-u|| > ||v-u_0||$.

טענה 5.22 יהי V ממ"פ.

1. נניח עבור $w,v \in V$ מתקיים לכל $u \in V$: $<u,v>=<u,w>$, אזי $w=v$.
2. תהיינה $S,T : V \to V$ העתקות (לאו דווקא ליניאריות) אם לכל $u,v \in V$ קיים: $<u,Sv>=<u,Tv>$ אזי $S=T$.
3. אם $<Su,v>=0$ לכל $u,v \in V$ אז $S=0$.

5.3.1 מטריצת $Gram$

הגדרה 5.23 יהי V ממ"פ ויהיו $v_1,..,v_k \in V$ וקטורים. מטריצת גראם של $v_1,..,v_k$ היא מטריצה G המוגדרת באופן הבא: $(G)_{ij}=<v_i,v_j>$.

הערה: במקרה המרוכב - $G=G^*$(הרמיטית), במקרה הממשי $G=G^t$(סימטרית).

הגדרה 5.24 **דטרמיננטת גראם** של קבוצת וקטורים היא הדטרמיננטה של מטריצת גראם המתאימה לקבוצה.

משפט 5.25 תהי $\{v_1,...,v_k\}$ וקטורים בממ"פ V. אזי $\{v_1,...,v_k\}$ היא קבוצה תלויה ליניארית אם ורק אם דטרמיננטת גראם של $\{v_1,...,v_k\}$ היא 0.

5.3.2 משפט הפירוק האורתוגונלי

משפט 5.26 יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד $n \geq 1$ ונניח כי $U \subseteq V$ הוא תת מרחב של V.

1. $V = U \oplus U^{\perp}$.
2. $(U^{\perp})^{\perp} = U$.

הטלה אורתוגונלית
אם V ממ"פ ו־U תת מרחב, אזי לפי משפט 5.26 כל $v \in V$ ניתן להציג כ־$v=u+u'$ כאשר $u \in U \,\&\, u' \in U^{\perp}$.

הגדרה 5.27 יהי U תת מרחב של ממ"פ V, אזי **ההטלה האורתוגונלית** של V על U היא העתקה ליניארית $P_U : V \to U$ המוגדרת על ידי: $P_U(v)=u$ כאשר $v=u+u'$ כאמור לעיל.

טענה 5.28 אם $\{u_1,..,u_k\}$ בסיס אורתונורמלי של U אזי $P_U(v)=\sum_{i=1}^{k}<v,u_i>u_i$.

5.3.3 תהליך גראם שמידט

משפט 5.29 יהי V ממ"פ ממימד $n \geq 1$ ונניח כי $B=\{v_1,...,v_n\}$ בסיס סדור של V. אז קיים בסיס סדור אורתונורמלי $B^*=\{v_1^*,...,v_k^*\}$ של V כך שלכל $1 \leq k \leq n$ קיים $\text{sp}\{v_1,,.,v_k\}=\text{sp}\{v_1^*,...,v_k^*\}$.
אלגוריתם למציאת בסיס אורתונורמלי
בסיס אורתונורמלי $\{u_1,..,u_n\}$(המקיים את תנאי המשפט) למרחב וקטורי V בהינתן בסיס $\{v_1,...,v_n\}$ כלשהוא, מוגדר באינדוקציה על ידי:

$$i=1: \qquad u_1=\frac{v_1}{||v_1||}$$

$$2 \leq i \leq n: \quad w_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1}<v_i,u_j>u_j \quad u_i=\frac{w_i}{||w_i||}$$

6 העתקות ליניאריות במרחבי מכפלה פנימית

כל המרחבים הוקטוריים בחלק זה הינם ממימד סופי, $n \geq 1$. כמו כן $F=\mathbb{C}$ או $F=\mathbb{R}$.

6.1 ההעתקה הצמודה

משפט 6.1 יהי V מרחב מכפלה פנימית. תהי $T : V \to V$ העתקה ליניארית אזי:

1. קיימת ויחידה העתקה $T^* : V \to V$ המקיימת $\forall u,v \in V :<Tu,v>=<u,T^*v>$
2. ההעתקה T^* היא ליניארית.

הגדרה 6.2 בהינתן העתקה ליניארית $T : V \to V$, ההעתקה הליניארית היחידה $T^* : V \to V$ המקיימת : $\forall u,v \in V :<Tu,v>=<u,T^*v>$ תקרא **ההעתקה הצמודה** ל־T.

משפט 6.3 **(תכונות של העתקות צמודות)** יהי V ממ"פ ו־$S,T : V \to V$ ה"ל.

1. $(T^*)^* = T$
2. $(S+T)^* = S^* + T^*$
3. לכל סקלר α : $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$
4. $0^*=0$, $I^*=I$.
5. $(ST)^* = T^* S^*$
6. אם T הפיכה אז $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$

משפט 6.4 תהי $T : V \to V$ העתקה ליניארית.

1. אם $B=\{w_1,...,w_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V אזי קיים כי $[T^*]_B = ([T]_B)^*$.
2. אם עבור העתקה ליניארית $S : V \to V$ ועבור בסיס אורתונורמלי B כלשהו של V מתקיים $[S]_B = ([T]_B)^*$ אזי $S=T^*$.

6.1.1 העתקות צמודות לעצמן

משפט 6.5 יהי V ממ"פ , העתקה ליניארית $T : V \to V$ נקראת צמודה לעצמה אם $T=T^*$.

משפט 6.6 העתקה ליניארית $T : V \to V$ היא צמודה לעצמה אם ורק אם בבסיס אורתונורמלי B של V מתקיים: $[T]_B = ([T]_B)^*$

למה 6.7 יהי V ממ"פ ו־ $T : V \to V$ העתקה צמודה לעצמה, אם $<Tv,v>=0$ לכל $v \in V$ אזי $T=0$.

משפט 6.8 יהי V ממ"פ <u>מרוכב</u>, ו־$T : V \to V$ העתקה ליניארית. אם $<Tv,v>=0$ לכל $v \in V$ אז $T=0$.

משפט 6.9 יהי V ממ"פ <u>מרוכב</u>, ותהי $T : V \to V$ העתקה ליניארית. אזי T צמודה לעצמה אם ורק אם לכל $u \in V$ מתקיים כי $<Tu,u>$ מספר ממשי.

6.2 העתקות אוניטריות

הגדרה 6.10 העתקה ליניארית $T: V \to V$ נקראת **אוניטרית** אם מתקיים $TT^*=T^*T=I$.
(במקרה הממשי העתקה אוניטרית נקראת העתקה אורתוגונלית)

משפט 6.11 יהי V מרחב מכפלה פנימית ו־$T : V \to V$ העתקה ליניארית, אז התנאים הבאים שקולים:

1. T אוניטרית
2. לכל $u, v \in V$ קיים: $<Tu, Tv>=<u, v>$.
3. לכל $u \in V$ קיים: $||Tu|| = ||u||$.

משפט 6.12 תהי $T : V \to V$ העתקה ליניארית, אזי T אוניטרית אם ורק אם T מעבירה בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי.

הגדרה 6.13 מטריצה $A \in M_n(F)$ (כאשר $F = \mathbb{C}$ או $F = \mathbb{R}$) נקראת אוניטרית אם $AA^* = A^*A = I$.

טענה 6.14 תהי $A \in M_n(F)$ מטריצה אוניטרית. אז השורות (העמודות) של A הן בסיס אורתונורמלי של F^n.

משפט 6.15 א) אם $T : V \to V$ העתקה אוניטרית ו־B בסיס אורתונורמלי של V, אז מטריצת הייצוג $[T]_B$ מטריצה אוניטרית.
ב) אם $T : V \to V$ העתקה ליניארית ובבסיס אורתונורמלי B של V מקבלים כי $[T]_B$ מטריצה אוניטרית אז T אוניטרית.

6.3 ערכים עצמיים של העתקות ליניאריות במרחבי מכפלה פנימית

טענה 6.16 $T : V \to V$ העתקה ליניארית של ממ"פ V. נניח כי T צמודה לעצמה ויהי λ ע"ע של T, אז λ הוא מספר ממשי.

משפט 6.17 תהי $T : V \to V$ העתקה ליניארית של מרחב מכפלה פנימית V. נניח כי T צמודה לעצמה. אז הפולינום האופייני $P_T(t)$ מתפרק לגורמים ליניאריים:$P_T(t) = (t-\lambda_1)...(t-\lambda_k)$. כאשר $n = \dim V$ ו־$\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$.

משפט 6.18 תהי $T : V \to V$ העתקה אוניטרית של מרחב מכפלה פנימית V. יהי λ ע"ע של T, אזי $|\lambda| = 1$.

6.4 ליכסון אוניטרי

הגדרה 6.19 יהי V ממ"פ ותהי $T : V \to V$ העתקה ליניארית. T נקראת **לכסינה אוניטרית** אם קיים בסיס אורתונורמלי B של V בו מטריצת הייצוג $[T]_B$ היא אלכסונית.
הגדרה מקבילה למטריצות תהי $A \in M_n(F)$ מטריצה, A לכסינה אוניטרית אם קיימת מטריצה אוניטרית $Q \in M_n(F)$ כך שהמטריצה $D = Q^{-1}AQ$ אלכסונית.

משפט 6.20 תהי $T : V \to V$ ה"ל של ממ"פ V. יהי B בסיס אורתונורמלי של V ותהי $A = [T]_B$ מטריצת הייצוג של T לפי B. אזי T לכסינה אוניטרית אם ורק אם A לכסינה אוניטרית.

משפט 6.21 (תנאי הכרחי לליכסון אוניטרי) יהי V ממ"פ ו־$T : V \to V$ ה"ל. נניח כי T לכסינה אוניטרית, אזי: $TT^* = T^*T$.

הגדרה 6.22 תהי $T : V \to V$ ה"ל של ממ"פ V. אם קיים $TT^* = T^*T$ אזי T נקראת **נורמלית**.

משפט 6.23 (תנאי מספיק והכרחי) יהי V ממ"פ, ו־$T : V \to V$, אזי T לכסינה אוניטרית אם ורק אם מתקיים:

1. T נורמלית
2. הפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים ליניאריים.

מסקנות מהמשפט:

1. אם V ממ"פ מרוכב אז T לכסינה אוניטרית אם ורק אם T נורמלית.
2. אם T צמודה לעצמה אז T לכסינה אוניטרית.

משפט 6.24 (מקביל למטריצות) תהי $A \in M_n(F)$ מטריצה נורמלית, נניח כי הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים ליניאריים אזי A לכסינה אוניטרית.

מסקנה 6.25 (מטריצה סימטרית לכסינה אורתוגונלית) תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה סימטרית, אזי A לכסינה אורתוגונלית. כלומר קיימת מטריצה אורתוגונלית $Q \in M_n(\mathbb{R})$ ומטריצה אלכסונית $D \in M_n(\mathbb{R})$ כך ש־$D = Q^{-1}AQ = Q^tAQ$.

6.4.1 מציאת בסיס אורתונורמלי מלכסן

משפט 6.26 תהי $T : V \to V$ העתקה נורמלית של ממ"פ V. נניח כי $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ע"ע של T ו־ $v_1, v_2 \in V$ ו"ע השייכים לערכים λ_1, λ_2 בהתאמה. אזי v_1, v_2 ניצבים זה לזה, $<v_1, v_2>= 0$.

אלגוריתם לכסון אוניטרי
נתון: $T : V \to V$ העתקה נורמלית.

1. נמצא את הפולינום האופייני $P_T(t)$.
2. נבדוק האם $P_T(t)$ מתפרק לגורמים ליניאריים, אם לא T אינה לכסינה.
3. נניח כי $P_T(t) = (t-\lambda_1)^{s_1}...(t-\lambda_k)^{s_k}$ כאשר $\lambda_i \neq \lambda_j$ עבור $1 \le i \neq j \le k$, ו־$s_1 + ... + s_k = n = \dim V$.
4. לכל $1 \le i \le k$ נמצא בסיס א"נ B_i של מרחב עצמי V_{λ_i}.
5. נגדיר $B = \bigcup_{i=1}^k B_k$, זהו הבסיס האורתונורמלי המבוקש.

משפט 6.27 V ממ"פ ו־$T : V \to V$ העתקה ליניארית. אם T נורמלית והפולינום האופייני $P_T(t)$ מתפרק לגורמים ליניאריים: $P_T(t) = (t-\lambda_1)^{s_1}...(t-\lambda_k)^{s_k}$.
אז: $V = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_k}$. כאשר V_{λ_i} המרחב העצמי השייך לע"ע λ_i, ו־$V_{\lambda_i} \perp V_{\lambda_j}$ עבור $1 \le j \neq i \le k$.

6.4.2 המשפט הספקטרלי

משפט 6.28 V ממ"פ ו־$T : V \to V$ העתקה ליניארית. נניח כי:
1) T נורמלית, כלומר $TT^* = T^*T$.
2) הפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים ליניאריים: $P_T(t) = (t-\lambda_1)^{s_1}...(t-\lambda_k)^{s_k}$.
עבור $1 \le i \le k$ נסמן V_{λ_i} את המרחב העצמי של ע"ע λ_i. כמו כן נסמן ב־$P_i : V \to V$ את ההטלה האורתוגונלית על תת מרחב V_{λ_i}, אז:

1. $T = \lambda_1P_1 + \lambda_2P_2 + ... + \lambda_kP_k$
2. $P_1 + ... + P_k = I$.
3. לכל $1 \le i \neq j \le k$ מתקיים $P_iP_j = 0$.

שימושים למשפט הספקטרלי
נניח כי $T : V \to V$ נורמלית וכן $P_T(t) = (t-\lambda_1)^{s_1}...(t-\lambda_k)^{s_k}$.

1.

$$T^2 = TT = (\sum_{i=1}^k \lambda_iP_i)(\sum_{i=1}^k \lambda_iP_i) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \lambda_i\lambda_jP_iP_j = \\ = \sum_{i=1}^k \lambda_i^2P_i^2 = \sum_{i=1}^k \lambda_i^2P_i$$

ובאופן יותר כללי: $T^n = \sum_{i=1}^k \lambda_i^nP_i$.

2.

$$T^*=(\sum_{i=1}^{k}\lambda_iP_i)^*=\sum_{i=1}^{k}\overline{\lambda}_iP_i^*=\sum_{i=1}^{k}\overline{\lambda}_iP_i$$

(א) בפרט אם הערכים העצמיים של T ממשיים $\lambda_i=\overline{\lambda}_i$ אזי $T=T^*$.

3. אם $|\lambda_i|=1$ לכל $1\le i\le k$ אזי:

$$TT^*=(\sum_{i=1}^{k}\lambda_iP_i)(\sum_{i=1}^{k}\overline{\lambda}_iP_i)=\sum_{i=1}^{k}|\lambda_i|^2P_i=I$$

T אוניטרית

6.5 העתקות אורתוגנליות

הגדרה 6.29 תהי $T:V\to V$ העתקה אורתוגונלית. תת מרחב U של V נקרא T־שמור אם $T(U)\subseteq U$. כלומר $Tu\in U$ לכל $u\in U$.

משפט 6.30 יהי V ממ"פ ממשי. תהי $T:V\to V$ העתקה אורתוגונלית, אזי קיים פירוק $V=V_1\oplus ...\oplus V_r$ כאשר V_i תת מרחב T־שמור של V, $\dim V_i\in\{1,2\}$ ו־$V_i\bot V_j$ לכל $i\neq j$.

מסקנה 6.31 תהי $T:V\to V$ העתקה אורתוגונלית של ממ"פ ממשי V. אז קיים בסיס אורתונורמלי B של V בו

$$[T]_B=\begin{bmatrix}[M_1] & & & 0\\ & [M_2] & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & [M_r]\end{bmatrix}$$

כאשר M_i היא מטריצה ממשית אורתוגנלית מסדר 1×1 או 2×2. ובמקרה ש־ $M_i\in M_1(\mathbb{R})$ אזי $M_i=[1]$ או $M_i=[-1]$.

7 תבניות בילינאריות וריבועיות

<u>הערה:</u> בכל הדיון על תבניות ריבועיות אנו מניחים כי $\mathrm{char}F\neq2$.

משפט 7.1 יהי מרחב וקטורי מעל שדה F. פונקציה $f:V\times V\to F$ נקראת **תבנית בילינארית** אם היא ליניארית בכל אחד מהמשתנים, כלומר:

1. לכל $v\in U$ מתקיים: $\forall u_1,u_2\in V:\ f(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2,v)=\alpha_1f(u_1,v)+\alpha_2f(u_2,v)$ כאשר $\alpha_1,\alpha_2\in F$.

2. באופן דומה עבור המשתנה השני.

הגדרה 7.2 תהי $f:V\times V\to F$ תבנית בילינארית ויהי $B=\{v_1,...,v_n\}$ בסיס סדור של V. **המטריצה של התבנית הבילינארית** לפי בסיס B, המסומנת ב־$[f]_B$ הינה מטריצה $A\in M_n(F)$ המוגדרת על ידי $(A)_{ij}=f(v_i,v_j)$.

משפט 7.3 תהי $f:V\times V\to F$ תבנית בילינארית המוגדרת על מרחב וקטורי V. יהי B בסיס סדור של V. אז לכל $u,v\in V$ מתקיים:

$$f(u,v)=[u]_B^t[f]_B[v]_B$$

הגדרה 7.4 תבנית בילינארית $f:V\times V\to F$, f נקראת סימטרית אם: $\forall u,v\in V:\ f(u,v)=f(v,u)$.
f נקראת אנטי־סימטרית אם: $\forall u,v\in V:\ f(u,v)=-f(v,u)$.

משפט 7.5 תהי $f:V\times V\to F$ תבנית בילינארית על מרחב וקטורי V. יהי B בסיס סדור של V. אזי f סימטרית אם ורק אם מטריצת התבנית $[f]_B$ היא סימטרית.

הגדרה 7.6 תהי $f:V\times V\to F$ תבנית בילינארית. הפונקציה $q:V\to F$ המוגדרת על ידי $q(v)=f(v,v)$ נקראת **התבנית הריבועית** הקשורה ל־f. (נשים לב כי לאותה תבנית ריבועית q מתאימה יותר מתבנית בילינארית אחת).

טענה 7.7 תהי $q:V\to F$ תבנית ריבועית אזי קיימת תבנית בילינארית <u>סימטרית</u> יחידה כך ש־q הינה התבנית הריבועית המתאימה ל־f.
בהינתן q התבנית הסימטרית הינה: $f(u,v)=\frac{1}{2}[q(u+v)-q(u)-q(v)]$.

הגדרה 7.8 תהי $q:V\to F$ תבנית ריבועית ו־B בסיס סדור של V. אז המטריצה $[q]_B$ מוגדרת על ידי $[q]_B=[f]_B$ כאשר f הינה התבנית הבילינארית הסימטרית היחידה המתאימה ל־q.

טענה 7.9 תהי $q:V\to F$ תבנית ריבועית, B בסיס סדור של V, אזי: $q(v)=[v]_B^t[q]_B[v]_B$.
תזכורת: מטריצת המעבר מבסיס B ל־B' היא מטריצה M שעמודותיה הם וקטורי B' בקואורדינטות על פי בסיס B ומקיימת לכל $v\in V$: $[v]_B=M[v]_{B'}$.

משפט 7.10 (החלפת בסיס) תהי $f:V\times V\to F$ תבנית בילינארית המוגדרת על מרחב וקטורי n מימדי מעל שדה F. יהיו B,B' בסיסים סדורים של V, ותהי $M\in M_n(F)$ מטריצת המעבר מ־B ל־B'. אזי: $[f]_{B'}=M^t[f]_BM$.
משפט זהה קיים גם לתבניות ריבועיות.

הגדרה 7.11 מטריצות $A,B\in M_n(F)$ נקראות **חופפות** אם קיימת מטריצה הפיכה $M\in M_n(F)$ כך ש־ $B=M^tAM$.

טענה 7.12 יחס החפיפה הוא יחס שקילות על הקבוצה $M_n(F)$.

טענה 7.13 למטריצות חופפות אותה דרגה.

משפט 7.14 מטריצות $A,B\in M_n(F)$ חופפות אם ורק אם הן מייצגות אותה תבנית ריבועית.

הגדרה 7.15 תהי $f:V\times V\to F$ תבנית בילינארית, **הדרגה** של f המסומנת ב־$\rho(f)$ הינה הדרגה של מטריצת הייצוג של f לפי בסיס B כלשהו של V.

7.1 ליכסון תבניות בילינאריות וריבועיות

משפט 7.16 (תנאי מספיק והכרחי לליכסון) תהי $f:V\times V\to F$ תבנית בילינארית אזי קיים בסיס B של V בו מטריצת הייצוג $[f]_B$ היא אלכסונית אם ורק אם f תבנית סימטרית.

משפט 7.17 תהי $q:V\to F$ תבנית ריבועית, אז קיים בסיס B של V בו מטריצת הייצוג $[q]_B$ היא אלכסונית.
ניסוח שקול: תהי $q:V\to F$ תבנית ריבועית, אז קיים בסיס B של V שבו $q(v)=q(t_1,...,t_n)=\beta_1t_1^2+....+\beta_nt_n^2$. כאשר $\beta_i\in F$ ו־ $[v]_B=(t_1,..,t_n)$.

מסקנה 7.18 תהי $A\in M_n(F)$ מטריצה סימטרית. אז A חופפת למטריצה אלכסונית, כלומר קיימת מטריצה הפיכה $M\in M_n(f)$ כך ש־ $D=M^tAM$ אלכסונית.
אלגוריתם לליכסון תבנית ריבועית
האלגוריתם הכללי ביותר בהוכחת משפט הליכסון, דוגמא לרעיון עבור תבנית $q(x,y,z):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$.

1. מקבצים את האיברים בהם משתתף משתנה x ומשלימים את הביטוי שמקבלים לריבוע שלם, נקבל תבנית מהצורה־ $q(x,y,z)=(\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z)^2+\lambda_1y^2+\lambda_2z^2+\lambda_3yz$.

2. מבצעים את אותה פעולה עבור המשתנה y, קיבלנו תבנית מהצורה: $q(x,y,z) = (\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z)^2+\mu_1(\beta_2 y+\gamma_2 z)^2+\mu_2 z^2$.
3. נגדיר בסיס חדש B' אשר מוגדר על ידי:
$$\begin{cases} x' = & \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z\\ y' = & \beta_2 y+\gamma_2 z \\ z' = & z\end{cases}$$
4. בבסיס B' נקבל כי אכן $q(x',y',z') = (x')^2+\mu_1(y')^2+\mu_2(z')^2$.
5. נרשום $[v]_{B'} = (x',y',z')$ ואז $[v]_{B'} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ & \beta_2 & \gamma_2\\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.
6. נסמן את המטריצה הנ"ל A, אזי זוהי מטריצת המעבר מ־B'אל E_3. לכן המטריצה שאנו מחפשים הינה $M=A^{-1}$ שהינה מטריצת המעבר מ־E_3 אל B'.
7. ומתקיים כי $D=M^t[q]_{E_3}M$ הינה מטריצה אלכסונית.

משפט 7.19 יהי V מרחב וקטורי מרוכב n מימדי ו־$f: V\times V\to\mathbb{C}$ תבנית בילינארית סימטרית. אזי קיים בסיס B של V שבו:
$$f(u,v)=f(x_1,...,x_n,y_1,..,y_n)=x_1y_1+...+x_\rho y_\rho$$
כאשר $[u]_B=(x_1,..,x_n)$, $[v]_B=(y_1,..,y_n)$ ו־ρ היא הדרגה של f.

מסקנה 7.20 תהי $A\in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה סימטרית, אז A חופפת למטריצה $D=\mathrm{diag}(\underbrace{1,....,1}_{\rho(A)},0,....,0)$.

משפט 7.21 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ממימד סופי. תהי $f: V\times V\to\mathbb{R}$ תבנית בילינארית סימטרית. אז קיים בסיס סדור B של V בו מטריצת הייצוג הינה מהצורה:
$$[f]_B=\mathrm{diag}(\underbrace{1,....,1}_{\pi},\underbrace{-1,....,-1}_{\rho-\pi},0,...,0)$$
כאשר ρ הינה הדרגה של f.

משפט זהה לתבניות ריבועיות.

משפט 7.22 (משפט ההתמדה של סילבסטר) יהי Vמרחב וקטורי סוף מימד ממשי. תהי $q: V\to\mathbb{R}$ תבנית ריבועית. נניח B,B' בסיסים סדורים של V בהם מטריצות הייצוג $[q]_B$ ו־$[q]_{B'}$ הינן אלכסוניות.
אזי מספרי האיברים החיוביים והשליליים בשתי מטריצות הייצוג הנ"ל שווים אלה לאלה, בהתאמה.

מסקנה 7.23 לכל תבנית ריבועית $q: V\to\mathbb{R}$ על מ"ו ממשי סוף מימדי, אז בכל צורה אלכסונית של q, מס' האיברים החיוביים באלכסון π ומס' האיברים השליליים באלכסון $\rho-\pi$ לא תלויים בבחירת הבסיס. על כן הם השמורות (אינווריאנטיות) של q.

הגדרה 7.24 ההפרש בין מספר האיברים החיוביים למספר האיברים השליליים בצורה אלכסונית של תבנית ריבועית q, $\pi-(\rho-\pi)$, נקרא **הסימנית** (סיגנטורה) של q.

מסקנה 7.25 א) כל מטריצה ממשית סימטרית $A\in M_n(\mathbb{R})$ חופפת למטריצה יחידה מהצורה: $D=\mathrm{diag}(1,..,1,-1,...,-1,0,...,0)$.
ב) תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ מטריצות ממשיות סימטריות. אזי A,B חופפות אם ורק אם $\rho(A)=\rho(B)$ והסימניות של A ו־B שוות.

7.1.1 הסימן של תבנית ריבועית ממשית

הגדרה 7.26 יהי V מרחב וקטורי ממשי ותהי $q: V\to\mathbb{R}$ תבנית ריבועית. אזי q נקראת:

- **חיובית לחלוטין** אם $q(v)>0$ לכל $0\neq v\in V$.
- **חיובית למחצה** אם $q(v)\geq 0$ לכל $v\in V$.
- **שלילית לחלוטין** אם $q(v)<0$ לכל $0\neq v\in V$.
- **שלילית למחצה** אם $q(v)\leq 0$ לכל $v\in V$.

טענה 7.27 יהי V מרחב וקטורי ממשי nמימדי ותהי $q: V\to\mathbb{R}$ תבנית ריבועית עם פרמטרים ρ ו־π.

1. q חיובית לחלוטין אם ורק אם $\pi=n$.
2. q חיובית למחצה אם ורק אם $\pi=\rho$.
3. q שלילית לחלוטין אם ורק אם $\pi=0$ ו־$\rho=n$.
4. q שלילית למחצה אם ורק אם $\pi=0$.

משפט 7.28 יהי V מ"ו ממשי סוף מימדי ותהי $q: V\to\mathbb{R}$ תבנית ריבועית. נניח כי B הוא בסיס סדור של V. אז q חיובית לחלוטין אם ורק אם כל הערכים העצמיים של $[q]_B$ הם חיוביים.

7.1.2 שיטת הלכסון של יעקובי

משפט 7.29 יהי V מרחב וקטורי ממימד $n\geq 1$ מעל שדה F ותהי $f: V\times V\to F$ תבנית בילינארית סימטרית.
יהי B בסיס סדור של V ותהי $A=(\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$ מטריצת הייצוגת של f לפי בסיס B.
נניח כי $0\neq\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1i}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{ii}\end{vmatrix}=\Delta_i$ לכל $1\leq i\leq n$.
אזי קיים בסיס סדור B' של V בו למטריצת הייצוג $[f]_{B'}$ הצורה הבאה
$$[f]_{B'}=\mathrm{diag}(\frac{1}{\Delta_1},\frac{\Delta_1}{\Delta_2},...,\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n})$$

משפט מקביל קיים גם לתבניות ריבועיות.

מסקנה 7.30 (קריטריון סילבסטר) יהי V מרחב וקטורי n מימדי ($n\geq 1$) מעל $\mathbb{R}$.
תהי $q: V\to\mathbb{R}$ תבנית ריבועית המוגדרת על V.
נניח כי בבסיס סדור B, מטריצת הייצוג $[q]_B$ היא מהצורה $(([q]_B)_{ij}=\alpha_{ij})$.
אזי q היא חיובית לחלוטין אם ורק אם $0<\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1i}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{ii}\end{vmatrix}=\Delta_i$ לכל $1\leq i\leq n$.