

# אינפי 3 תרגיל 8-פתרונות

## שאלה 1

### סעיף א

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 6y^2$$

נחשב גרדיאנט ונקבל

$$\nabla f = (3x^2 + 6x, 3y^2 - 12y)$$

הגרדיאנט מתאפס כאשר

$$3x^2 + 6x \Rightarrow x = 0 \vee x = -2$$

$$3y^2 - 12y = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = 4$$

לכן הנקודות הקריטיות הן

$$(0, 0), (0, 4), (-2, 0), (-2, 4)$$

נחשב את מטריצת ההסיאן.

$$H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 6x + 6 & 0 \\ 0 & 6y - 12 \end{pmatrix}$$

נבדוק את המטריצה עבור כל נקודה

$$H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם  $6, -12$  ולכן המטריצה מעורבת וזו נקודת אוכף.

$$H_{(0,4)} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם  $6, 12$  ולכן זו מטריצה חיובית לחלוטין והנקודה היא נקודת מינימום.

$$H_{(-2,0)} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם  $-6, -12$  ולכן זו מטריצה שלילית לחלוטין וזו נקודת מקסימום.

$$H_{(-2,4)} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם  $-6, 12$  ולכן זו מטריצה מעורבת וזו נקודת אוכף.

## סעיף ב

$$f(x, y) = (x - 1)^2 - 2y^2$$

הגרדיאנט הוא:

$$\nabla f = (2(x - 1), -4y)$$

הוא שווה לאפס רק בנקודה

$$(1, 0)$$

מטריצת ההסיאן היא

$$H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

בפרט

$$H_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם  $2, -4$  ולכן זו מטריצה מעורבת והנקודה היא נקודת אוכף.

## סעיף ג

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

$$\nabla f = (4x^3 - 4x + 4y, 4y^3 - 4y + 4x)$$

כלומר נקבל מערכת משוואות:

$$x^3 - x + y = 0$$

$$y^3 - y + x = 0$$

נסכום את שתי המשוואות ונקבל

$$x^3 + y^3 = 0$$

ולכן  $x = -y$ . נציב זאת במשוואה הראשונה ונקבל

$$x^3 - 2x = 0$$

שזה מתקיים כאשר  $x = 0$  או כאשר  $x = \pm\sqrt{2}$ . לכן הנקודות הקריטיות הן

$$(0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

מטריצת ההסיאן היא:

$$H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

עבור

$$H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

שזו מטריצה לא הפיכה ולכן לא ניתן לקבוע מההסיאן אם הנקודה היא מינימום, מקסימום או אוקף.

$$H_{(\sqrt{2}, -\sqrt{2})} = H_{(-\sqrt{2}, \sqrt{2})} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

בעזרת קריטריון סילבסטר נראה ש  $20 > 0$  ו הדטרמיננטה היא  $400 - 16 > 0$  ולכן המטריצה היא חיובית לחלוטין ולכן אלה נקודות מינימום. כדי לבדוק את  $(0, 0)$  נשתמש בדרכים אחרות. נשים לב ש

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

אם נתקדם לאורך  $x = y$  נקבל ש

$$f(x, x) = x^4 + x^4 \geq 0$$

ולכן  $(0, 0)$  היא לא נקודת מקסימום. מצד שני, אם נתקדם לאורך  $y = 0$  נקבל

$$f(x, 0) = x^4 - 2x^2$$

אם נחקור פונקציה זו נקבל

$$f' = 4x^3 - 4x$$

$$f'' = 12x^2 - 4$$

בנקודה  $x = 0$  נקבל

$$f''(0) = -4 < 0$$

ולכן  $x = 0$  היא מקסימום לאורך הישר  $y = 0$ . ולכן היא לא מינימום, לכן קיבלנו ש  $(0, 0)$  היא נקודת אוקף.

## סעיף ד

$$f(x, y) = xy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (a, b > 0)$$

נחשב את הגרדיאנט

$$f_x = y \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} + xy \frac{-2 \frac{x}{a^2}}{2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = \frac{y(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}) - \frac{x^2 y}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = \frac{y - 2 \frac{x^2 y}{a^2} - \frac{y^3}{b^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

באופן דומה

$$f_y = \frac{x - \frac{x^3}{a^2} - 2\frac{y^2x}{b^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

לכן צריך לבדוק מתי

$$\frac{y - 2\frac{x^2y}{a^2} - \frac{y^3}{b^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = 0, \quad \frac{x - \frac{x^3}{a^2} - 2\frac{y^2x}{b^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = 0$$

כלומר

$$y - 2\frac{x^2y}{a^2} - \frac{y^3}{b^2} = 0, \quad x - \frac{x^3}{a^2} - 2\frac{y^2x}{b^2} = 0$$

ראשית נניח ש  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  ואז ניתן לחלק ב  $y$  במשוואה הראשונה וב  $x$  במשוואה השנייה. ולקבל

$$1 - 2\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad 1 - \frac{x^2}{a^2} - 2\frac{y^2}{b^2} = 0$$

כלומר

$$2\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 = \frac{x^2}{a^2} - 2\frac{y^2}{b^2}$$

ולכן

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$$

ולכן

$$x = \pm \frac{ay}{b}$$

נציב זאת במשוואה

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - 2\frac{y^2}{b^2} = 0$$

ונקבל

$$1 - \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y^2}{b^2} = 0$$

כלומר

$$y^2 = \frac{b^2}{3}$$

ולכן

$$y = \pm \frac{b}{\sqrt{3}}$$

כלומר, אם לא מסתכלים על הצירים (כי הנחנו ש  $x, y \neq 0$ ) הנקודות הקריטיות הן

$$\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$$

כעת נבדוק מה קורה על הצירים. ברור ש  $(0, 0)$  היא נקודה קריטית. אם  $x = 0$  אבל  $y \neq 0$  נקבל

$$y - 2\frac{x^2y}{a^2} - \frac{y^3}{b^2} = 0 \Rightarrow y - \frac{y^3}{b^2} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow y = \pm b$$

באופן דומה אם  $y = 0$  ו  $x \neq 0$  נקבל נקודות קריטיות כאשר  $x = \pm a$ . אבל  $(a, 0)$ ,  $(-a, 0)$ ,  $(0, b)$ ,  $(0, -b)$  נמצאים מחוץ לתחום שאנחנו בודקים ולכן נזרוק אותן. לסיכום: כלל הנקודות הקריטיות הן

$$\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right), (0, 0)$$

ראשית נבדוק את הנקודה  $(0, 0)$ . ברור ש  $\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} > 0$  בסביבת הנקודה בכל התחום שלנו. לכן אם נתקדם לאורך  $x = y$  נקבל

$$f(x, x) = x^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} > 0$$

ואם נתקדם לאורך  $x = -y$  נקבל

$$f(x, -x) = -x^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} < 0$$

אבל  $f(0, 0) = 0$  ולכן זו נקודת אוכף.

כדי לסווג את שאר הנקודות, נסתמך על התובנות הבאות:

- אם  $f(x_0) > 0$  אז  $x_0$  מקסימום מקומי של  $f$  אם ורק אם הוא מקסימום מקומי של  $f^2$ .
- אם  $f(x_0) > 0$  אז  $x_0$  מינימום מקומי של  $f$  אם ורק אם הוא מינימום מקומי של  $f^2$ .
- אם  $f(x_0) < 0$  אז  $x_0$  מקסימום מקומי של  $f$  אם ורק אם הוא מינימום מקומי של  $f^2$ .
- אם  $f(x_0) < 0$  אז  $x_0$  מינימום מקומי של  $f$  אם ורק אם הוא מקסימום מקומי של  $f^2$ .

לכן נחקור את

$$f^2(x, y) = x^2 y^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) = x^2 y^2 - \frac{x^4 y^2}{a^2} - \frac{x^2 y^4}{b^2}$$

נגזרות מסדר ראשון

$$f_x = 2xy^2 - 4\frac{x^3 y^2}{a^2} - 2\frac{xy^4}{b^2}, \quad f_y = 2x^2 y - 2\frac{x^4 y}{a^2} - 4\frac{x^2 y^3}{b^2}$$

ולכן הנגזרות מסדר שני הן:

$$f_{xx} = 2y^2 - 12\frac{x^2 y^2}{a^2} - 2\frac{y^4}{b^2}, \quad f_{xy} = 4xy - 8\frac{x^3 y}{a^2} - 8\frac{xy^3}{b^2}, \quad f_{yy} = 2x^2 - 2\frac{x^4}{a^2} - 12\frac{x^2 y^2}{b^2}$$

ולכן ההסיאן היא:

$$H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2y^2 - 12\frac{x^2 y^2}{a^2} - 2\frac{y^4}{b^2} & 4xy - 8\frac{x^3 y}{a^2} - 8\frac{xy^3}{b^2} \\ 4xy - 8\frac{x^3 y}{a^2} - 8\frac{xy^3}{b^2} & 2x^2 - 2\frac{x^4}{a^2} - 12\frac{x^2 y^2}{b^2} \end{pmatrix}$$

נבדוק כל נקודה קריטית בנפרד

$$H_{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right)} = \begin{pmatrix} \frac{2b^2}{3} - \frac{4b^2}{3} - \frac{2b^2}{9} & \frac{4ab}{3} - \frac{8ab}{9} - \frac{8ab}{9} \\ \frac{4ab}{3} - \frac{8ab}{9} - \frac{8ab}{9} & \frac{2a^2}{3} - \frac{4a^2}{3} - \frac{2a^2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8b^2}{9} & -\frac{4ab}{9} \\ -\frac{4ab}{9} & -\frac{8a^2}{9} \end{pmatrix}$$

המינור הראשון הוא  $-\frac{8b^2}{9} < 0$  והמינור השני הוא הדטרמיננטה שהיא  $\frac{64a^2 b^2}{81} - \frac{16a^2 b^2}{81} = \frac{48a^2 b^2}{81} > 0$  לכן זוהי מטריצה שלילית לחלוטין וזו נקודת מקסימום של  $f^2$ . קל לראות שנקבל אותו מינור ראשון ואותה דטרמיננטה עבור כל אחת מהנקודות הקריטיות ולכן הן כולן מקסימום של  $f^2$ .  
 כעת, נשים לב ש  $f\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right), f\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right) > 0$  ולכן נקודות אלה הן מקסימום גם של  $f$  ואילו  $f\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right), f\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right) < 0$  ולכן נקודות אלה הן מינימום של  $f$ .

## סעיף ה

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$$

נמצא נגזרות חלקיות

$$f_x(x, y) = 2xe^{-(x^2 + y^2)} + (x^2 + y^2)(-2x)e^{-(x^2 + y^2)}$$

באופן דומה

$$f_y(x, y) = 2ye^{-(x^2 + y^2)} + (x^2 + y^2)(-2y)e^{-(x^2 + y^2)}$$

כלומר נקבל משוואות

$$2x - 2x(x^2 + y^2) = 0$$

$$2y - 2y(x^2 + y^2) = 0$$

אם  $x \neq 0$  ו  $y \neq 0$  נקבל שהמשוואות מתקיימות בכל נקודה שבה  $x^2 + y^2 = 1$ .  
אם  $x = 0$  נקבל שהמשוואה השנייה היא:

$$2y - 2y^3 = 0$$

שפתרונותיה הם  $y = 0$  או  $y = \pm 1$  ובדומה נקבל שאם  $y = 0$  אז  $x = 0$  או  $x = \pm 1$ . ולכן הנקודות הקריטיות הן

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}$$

היות ו  $f(x, y) \geq 0$  ו  $f(0, 0) = 0$  ברור ש  $(0, 0)$  היא נקודת מינימום. כדי לחקור את שאר הנקודות אפשר להציב  $t = x^2 + y^2$  ולחקור את הפונקציה  $g(t) = te^{-t}$  בנקודה  $t = 1$ . נקבל ש

$$g' = e^{-t} - te^{-t}$$

$$g'' = -e^{-t} - e^{-t} + te^{-t}$$

ולכן

$$g''(1) = -2e^{-1} + e^{-1} = -e^{-1} < 0$$

ולכן זו נקודת מקסימום ולכן גם הנקודות שבהן  $x^2 + y^2 = 1$  הן נקודות מקסימום.

## סעיף ו

$$f(x, y) = x^2y$$

הנגזרות החלקיות הן

$$f_x = 2xy, \quad f_y = x^2$$

ברור שהן שוות לאפס בכל נקודה שבה  $x = 0$ . לכן אלה הנקודות הקריטיות, נותר למיין אותן. ההסיאן היא

$$H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$H_{(0,y)} = \begin{pmatrix} 2y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שזאת לא מטריצה הפיכה. צריך לבדוק אחרת.  
ראשית נסתכל על הנקודה  $(0, 0)$

$$f(0, 0) = 0$$

אם מתקדמים ל  $(0, 0)$  לאורך  $x = y$  מתקבל ש

$$f(x, x) = x^3$$

וב  $0$  יש לפונקציה נקודת פיתול ולכן  $(0, 0)$  היא נקודת אוכף.  
אם  $y > 0$  אז

$$f(x, y) \geq 0$$

אבל בנקודה  $(0, y)$  מתקיים

$$f(0, y) = 0$$

ולכן ברור שהיא מינימום מקומי.  
באופן דומה, כאשר  $y < 0$  הנקודה  $(0, y)$  היא מקסימום מקומי.

### סעיף ז

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2a^2(x^2 + y^2 + z^2) \quad (a > 0)$$

נחשב נגזרות חלקיות ונשווה ל  $0$

$$f_x = 4x^3 - 4a^2x = 0 \Rightarrow x \in \{0, a, -a\}$$

$$f_y = 4y^3 - 4a^2y = 0 \Rightarrow y \in \{0, a, -a\}$$

$$f_z = 4z^3 - 4a^2z = 0 \Rightarrow z \in \{0, a, -a\}$$

קיבלנו שיש 27 נקודות קריטיות

$$\{0, a, -a\} \times \{0, a, -a\} \times \{0, a, -a\}$$

נמצא את מטריצת ההסיאן

$$H_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 12z^2 - 4a^2 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$H_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} -4a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -4a^2 \end{pmatrix}$$

זאת מטריצה שלילית לחלוטין ולכן  $(0, 0, 0)$  היא נקודת מקסימום.

$$H_{(\pm a, 0, 0)} = \begin{pmatrix} 8a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -4a^2 \end{pmatrix}$$

זאת מטריצה מעורבת ולכן  $(\pm a, 0, 0)$  היא נקודת אוכף, באופן דומה  $(0, \pm a, 0)$  ו  $(0, 0, \pm a)$  הן נקודות אוכף.

$$H_{(\pm a, \pm a, 0)} = \begin{pmatrix} 8a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 8a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -4a^2 \end{pmatrix}$$

זאת מטריצה מעורבת ולכן  $(\pm a, \pm a, 0)$  היא נקודת אוכף. באופן דומה גם  $(\pm a, 0, \pm a)$  ו  $(0, \pm a, \pm a)$  הן נקודות אוכף. כעת,

$$H_{(\pm a, \pm a, \pm a)} = \begin{pmatrix} 8a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 8a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8a^2 \end{pmatrix}$$

זאת מטריצה חיובית לחלוטין ולכן אלה נקודות מינימום.

## שאלה 2

$$f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$$

נשווה נגזרות חלקיות ל-0.

$$f_x = 3e^y - 3x^2 = 0, \quad f_y = 3xe^y - 3e^{3y} = 0$$

מהמשוואה השניה נקבל ש

$$x = e^{2y}$$

אם נציב זאת במשוואה הראשונה נקבל

$$3e^y - 3e^{4y} = 0 \Rightarrow e^{3y} = 1 \Rightarrow y = 0$$

לכן הנקודה הקריטית היחידה היא  $(1, 0)$  נמצא את מטריצה ההסיאן

$$H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -6x & 3e^y \\ 3e^y & 3xe^y - 9e^{3y} \end{pmatrix}$$

ולכן

$$H_{(1,0)} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

המינור הראשון הוא  $-6$  והמינור השני הוא  $36 - 9 > 0$  ולכן זאת מטריצה שלילית לחלוטין ולכן  $(1, 0)$  היא נקודת מקסימום. נותר לבדוק אם זאת נקודת קיצון גלובאלית

$$f(1, 0) = 3 - 1 = 2$$

אבל

$$f(-10, 0) = -30 + 1000 - 1 > 2$$

ולכן זה לא מקסימום גלובאלי. במשתנה אחד אם לפונקציה רציפה יש מקסימום מקומי ואין לה מינימום מקומי אז המקסימום הוא בהכרח גלובאלי.

### שאלה 3

#### סעיף א

$$f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$$

נחשב נגזרות חלקיות

$$f_x = -6x(y - x^2) + (y - 3x^2)(-2x), \quad f_y = (y - x^2) + (y - 3x^2)$$

קל לראות ש  $(0, 0)$  מאפסת את שתי הנגזרות החלקיות ולכן היא נקודה קריטית.

#### סעיף ב

$$f \circ g(t) = (bt - 3a^2t^2)(bt - a^2t^2) = b^2t^2 - 3a^2bt^3 - a^2bt^3 + 3a^4t^4 = 3a^4t^4 - 4a^2bt^3 + b^2t^2$$

נחקר פונקציה זו בשיטות רגילות של אינפי 1. נגזרת ראשונה:

$$12a^4t^3 - 12a^2bt^2 + 2b^2t$$

ברור ש  $t = 0$  הוא פתרון.

נגזרת שניה:

$$36a^4t^2 - 24a^2bt + 2b^2$$

אם נציב  $t = 0$  נקבל  $2b^2 > 0$  ולכן זה מינימום.

#### סעיף ג

נתקדם לאורך  $y = 2x^2$  ונקבל

$$f(x, 2x^2) = (2x^2 - 3x^2)(2x^2 - x^2) = -x^4$$

לפונקציה זו יש מקסימום בנקודה  $x = 0$  ולכן  $(0, 0)$  אינה נקודת מינימום אלא נקודת אוכף.

## שאלה 4

### סעיף א

היות  $f$  פונקציה רציפה ו  $D$  קבוצה סגורה אז  $f$  מקבלת מינימום ומקסימום עליה.

### סעיף ב

נחפש תחילה נקודות קריטיות בתוך המשולש

$$f_x = 2x - y - 2 = 0$$

$$f_y = 2y - x - 2 = 0$$

זאת מערכת לינארית פשוטה הפתרון היחיד הוא

$$x = 2 \quad y = 2$$

נקודה זאת אכן בתוך המשולש והיא נקודה קריטית. נעבור על צלעות המשולש: עבור  $y = 0$

$$f(x, 0) = x^2 - 2x$$

$$f' = 2x - 2$$

נקודה קריטית ב  $x = 1$  כלומר  $(1, 0)$ . בדומה קל למצוא את הנקודה הקריטית  $(0, 1)$  על הצלע  $x = 0$ . על הצלע  $x + y = 6$  נקבל:

$$\begin{aligned} f(x, 6-x) &= x^2 + (6-x)^2 - x(6-x) - 2x - 2(6-x) = \\ &= x^2 + 36 + x^2 - 12x - 6x + x^2 - 2x - 12 + 2x = \\ &= 3x^2 - 18x + 24 \end{aligned}$$

נגזור ונקבל

$$f' = 6x - 18$$

כלומר  $x = 3$  נקודה קריטית. אם נאסוף את כל הנקודות החשודות נקבל את  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(3, 3)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(6, 0)$ ,  $(0, 6)$  ולכן נותר לבדוק:

$$f(0, 6) = 24, \quad f(6, 0) = 24, \quad f(0, 0) = 0$$

$$f(2, 2) = -4, \quad f(3, 3) = -3, \quad f(1, 0) = f(0, 1) = -1$$

קיבלנו ש  $(0, 6)$  ו  $(6, 0)$  הם מקסימום גלובאלי וערכם 24. ו  $(2, 2)$  הוא מינימום גלובאלי שערכו -4.