פתרון מבחן תשעג מועד ב

21 בינואר 2016

1. משפט מהרצאה
2. משפט מהרצאה
3.

(א) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&17&-6\\0&48&-17\end{pmatrix}$. בשביל לחשב את הפ"א צריך לחשב את הדטרמיננטה של $\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda-17&6\\0&-48&\lambda+17\end{pmatrix}$. קל לפתח לפי השורה הראשונה. נקבל: $(\lambda-1)[(\lambda-17)(\lambda+17)+6\cdot 48]=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$. ולכן ע"ע הם: $\lambda_1=1$ $\lambda_2=-1$. כעת נמצא ו"ע ל λ_i ע"י מציאת בסיס ל $N(A-\lambda_i I)$:
עבור $\lambda_1=1$ נקבל: $\begin{pmatrix}0\\3\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ועבור $\lambda_2=-1$ נקבל: $\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$. הערה: כבר מהערכים העצמיים ניתן להסיק ש $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. נגדיר $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&8&3\end{pmatrix}$ (הו"ע כעמודות) ונקבל ש:

$$P^{-1}AP = D$$

שזה שקול ל :

$$A=PDP^{-1}$$

עבור המטריצה D קל לראות שהיא מקיימת $D^3=D$ (היא אלכסונית ולכן חזקה שלישית של המטריצה זה מטריצה אלכסונית שכל איבר באלכסון מועלים בחזקה שלישית) . נחשב

$$A^3 = (PDP^{-1})^3=PD^3P^{-1}=PDP^{-1}=A$$

לכן נקח אם נקח פשוט $A=B$ נקבל $B^3=A$.

(ב) נניח A לכסינה. אזי קיימת D אלכסונית ו P הפיכה כך ש $P^{-1}AP=D$ וע"י הכפלה מתאימה נקבל ש $A=PDP^{-1}$. ומכאן

$$A^k=(PDP^{-1})^k=PD^kP^{-1}$$

כיוון ש D אלכסונית אז גם D^k ואז בהכפלה מתאימה (שוב) נקבל ש

$$P^{-1}A^kP = D^k$$

כלומר A^k לכסינה.
הכיוון השני לא נכון. למשל $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ אינה לכסינה (הוכיחו!) ואילו $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ אלכסונית, ובפרט לכסינה.

.4

(א) הפתרון מופיע בקובץ אחר (במידה ולא השתנה שום דבר הוא אמור להיות ב $math-wiki$). התרגיל קשה מאוד.

(ב) מהנתון ש A מטריצה ריבועית מגודל $n\times n$ נקבל בחישוב פשוט כי הגדלים של $(adjA)^t$ ו $adj(A^t)$ שווים (שתיהן מגודל $n\times n$ גם כן). נותר להוכיח שהם שווים בכל כניסה. אכן, לכל i,j מתקיים כי

$$\left[(adjA)^t\right]_{i,.j} = [adjA]_{j,i} = (-1)^{i+j}\det M_{j,i}(A) = (-1)^{i+j}\det M_{i.j}(A^t) = \left[adj(A^t)\right]_{i,j}$$

כאשר עבור מטריצה B הסימון $M_{i,j}(B)$ פירושו המינור ה i,j של B.

.5

(א) נתחיל עם התמונה: לפי הגדרה $ImT = \{T(A) \,:\, A\in\mathbb{R}^{n\times n}\} = \{tr(A) \,:\, A\in\mathbb{R}^{n\times n}\}$. טענה T על. אכן, יהא $a\in\mathbb{R}$ ונרצה למצוא לו מקור. נגדיר את המטריצה האלכסונית

$$A = \begin{pmatrix} a & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

ואז $tr(A) = a$ כלומר מצאנו מקור. לכן $ImT = \mathbb{R}$ והמימד שלו 1. כעת לפי משפט הדרגה נקבל ש

$$n^2 = \dim\mathbb{R}^{n\times n} = \dim\ker T + \dim ImT$$

ולכן

$$\dim\ker T = n^2 - \dim ImT = n^2 - 1$$

לפי השלישי חינם מספיק למצוא n^2-1 מטריצות בת"ל שנמצאות בגרעין ואז הן יהיו בסיס.
לפי הגדרה $\ker T = \{A\in\mathbb{R}^{n\times n} \,:\, tr(A) = 0\}$. נתבונן במטריצות

$$B = \{E_{i,j} \;:\; i\neq j\}\cup\{E_{11} - E_{ii} \;:2\leq i\leq n\}$$

כאשר $E_{i,j}$ היא מטריצה שכולה אפסים פרט למקום ה i,j בו יש 1.
(למשל אם $n=3$ המטריצות שהוגדו לעיל הן

$$\left\{\begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix}\right\}\cup$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

שימו לב שזהו איחוד של קבוצות בסה"כ אכן קיבלנו 3^2-1 מטריצות).

קל לחשב כי ב B יש n^2-1 מטריצות. (בקבוצה השמאלית יש n^2-n מטריצות, 1 בכל n^2האפשרויות פרט לאלכסון. בקבוצה הימנית יש $n-1$ מטריצות.). בנוסף קל (בידקו!) שמטריצות אלו בת"ל ולכן מהוות בסיס ל $\ker T$.

(ב) ראשית נשים לב להכלות הבאות:

i. טענה: $\ker T \subseteq \ker T^2$.

הוכחה: יהי $v \in \ker T$ אזי לפי הגדרה $T(v)=0$ ואז $T^2(v)=T(T(v))=T(0)=0$ כלומר $v \in \ker T^2$.

ii. טענה: $Im(T^2) \subseteq Im(T)$.

הוכחה: יהי $v \in Im(T^2)$ אזי לפי הגדרה קיים u כך ש $T^2(u)=v$. ומכאן ש $T(u)$ הוא מקור שלו עבור ההעתקה T במפורש: $T\left(T(u)\right)=T^2(u)=v$ ולכן $v \in Im(T)$

כעת, נזכר במשפט הדרגה פעם אחת עבור T ופעם אחת עבור T^2. נקבל כי

$$\ker T + ImT = \dim V$$

$$\ker T^2 + ImT^2 = \dim V$$

וע"י חיבור המשוואות נקבל ש

$$\ker T + ImT = \ker T^2 + ImT^2$$

וכמסקנה מיידית נקבל ש

$$\dim \ker T = \dim \ker T^2 \iff \dim ImT = \dim ImT^2$$

כעת נוכיח את השאלה: אם $\ker T = \ker T^2$ אז מהמסקנה המיידית נקבל ש $\dim ImT = \dim ImT^2$. אבל בגלל ש $Im(T^2) \subseteq Im(T)$ זה אומר ש $Im(T^2)=Im(T)$ (זיכרו: תת מרחב שמוכל בתת מרחב אחר מאותו מימד - הם שווים).

באופן דומה, בכיוון השני, אם $ImT = ImT^2$. אז בפרט $\dim ImT = \dim ImT^2$.אז מהמסקנה המיידית נקבל ש $\dim \ker T = \dim \ker T^2$. אבל בגלל ש $\ker(T) \subseteq \ker(T^2)$ זה אומר ש $\ker(T^2)=\ker(T)$.

(ג) תחילה נמצא בסיס ל W. חישוב פשוט:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x-y+z=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{y+z}{2} \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, y,z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, y,z \in \mathbb{R} \right\}$$

לכן בסיס אפשרי ל W הוא :

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

כעת נגדיר העתקה לינארית $T:\mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ בעזרת משפט ההגדרה (נגדיר אותה בעזרת הבסיס $\left\{1,x,x^2\right\}$ של $\mathbb{R}_2[x]$) כך:

$$T(1)=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},T(x)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},T(x^2)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

התמונה אכן תהיה W. למה? הנה החישוב המפורש

$$\begin{aligned}
ImT &= \left\{T(ax^2+bx+c)\,:\,ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x]\right\}\\
&= \left\{aT(x^2)+bT(x)+cT(1)\,:\,ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x]\right\}\\
&= \left\{b\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\,:\,a,b,c\in\mathbb{R}\right\}\\
&= span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}=spanB=W
\end{aligned}$$