Yifat Haddad

yifatha7@gmail.com

תרגול לוגיקה

* פסוקים (אטומים, קשרים)
* טבלאות אמת
* פסוקים מורכבים, הצרנה
* טאוטולוגיות
* פרדיקטים וכמתים

פסוקים

משפט ~ פסוק

יחידת תוכן ~ אטום

שנת הלימודים החלה ויש 5 קורסים בשנה א

אטום קשר אטום

פסוק

אטומים יכולים להיות אמיתיים (יסומנו T או 1) או שקריים (F או 0)

פסוקים יקבלו ערך אמת לפי ערכי האמת של האטומים והקשרים בפסוק.

קשרים

הגדרה: יהיו A,B אטומים (או פסוקים) היכולים להיות אמת (1) או שקר (0) אזי הקשרים

- $A \to B$ - "גרירה" (חד כיוונית)
- $A \vee B$ "או"
- $A \wedge B$ "וגם"
- $\neg A$ "שלילה"

מוגדרים ע"י טבלאת האמת הבאה (טבלת שכל שורה בה מתאימה להצבה אחרת אחרת באטומים):

A	B	$A \to B$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\neg A$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0

אם יורד גשם אז יש עננים

הערה: קשר נוסף שהינו נפוץ בתחום המתמטיקה והוא גרירה דו-כיוונית (ידוע בכינויו אם ורק אם, אמ"מ). הגדרתו פשוטה (נובעת משמו..) והיא מוגדרת ע"י קשר הגרירה החד כיווני. $A \leftrightarrow B$ שטבלת האמת שלו זהה לטבלת האמת של $(A \to B) \wedge (B \to A)$

אם נסיים את החומר של השיעור אז נגמור מוקדם.

מתי הפסוק יקבל ערך F? מתי T?

(עבור שקר ⇐ אמת) כשלא נסיים את החומר, נקבל פסוק אמת

אם נסיים את החומר וגם השיעור נגמר מוקדם נקבל אמת

סיימנו את החומר + לא סיימנו מוקדם יהיה F.

3 הוא מספר ראשוני או 5 הוא מספר ראשוני.

4

הפסוק נכון, כי 5 ו-3 ראשוניים

גם אם המשפט היה 3 הוא מספר ראשוני או 4 מס ראשוני

מספר (טבעי) מסוים *n* ניתן להצגה בעזרת 2 ספרות (בבסיס עשרוני) <-> המספר *n* קטן מ 100.

הפסוק יקבל T אמ"מ שניהם יתקבלו ביחד. במילים אחרות:

תנאי 1 מתקיים ← תנאי 2 מתקיים אם 1 לא מתקיים אזי גם 2 לא.

פסוקים מורכבים

פסוקים יכולים להיות יותר מורכבים מאשר אטומים או חיבור של אטומים לקשרים. לכן, נתייחס לכל הבאים כפסוק:

א) אטומים

ב) אם p,q פסוקים, אז $p \to q$, $p \vee q$, $p \wedge q$ פסוקים.

ג) אם p פסוק, אז $\neg(p)$ פסוק.

הגדרה:

"אם יש בגרות בשעה חופפת לקורס אז הוא מתבטל"

A B

$A \to B$

למדתי היטב למבחן, ואף על פי כן נכשלתי בו.

B A

$A \land B$

"ערן לובש חולצה סגולה בכל פעם שהוא לובש מכנסיים בצבע שחור"

B A

$B \longrightarrow A$

כאשר אני עייף ורעב אני נעשה עצבני, או שאני הולך לישון; אבל אם אני עצבני ולא עייף, אז אני רעב

A - עייף   B - רעב   C - עצבני

D - לישון

$(A \wedge B) \rightarrow (C \vee D) \wedge (C \wedge \neg A) \rightarrow B$

טאוטולוגיות

הגדרה : טאוטולוגיה הינה ביטוי שנכון תמיד ללא תלות בערכים שמציבים בו. למשל $A \vee \neg A$

הגדרה: נאמר שביטוי A שקול טאוטולוגית לביטוי B (ונסמן $A \equiv B$) אם הביטוי $A \leftrightarrow B$ הינו טאוטולוגיה (במילים: A קורה אמ"מ B קורה)

תרגיל

הוכח באמצעות טבלאות אמת שניתן להציג את הקשרים 'גרירה' ו'וגם' באמצעות 'או' ושלילה בלבד

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

$$A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$$

תכונות הקשרים:

בעת נוכל לנסח את הטענה בצורה מדויקת, תכונות הקשרים: לכל שלוש פסוקים A, B, C מתקיים כי:

- קיבוציות $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C), (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
- חילופיות $A \wedge B \equiv B \wedge A, A \vee B \equiv B \vee A$
- פילוג $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C), A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- כללי דה מורגן $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B, \neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$. תוכיחו אחד מהם בתרגיל הבית

תרגיל

האם המשפטים הבאים שקולים:

א. אם אייל שמח אז ענת גבוהה, ואם ענת לא גבוהה אז אייל לא שמח.

ב. אייל שמח אם ורק אם ענת גבוהה.

A - אייל שמח B - ענת גבוהה

א) $(A \to B) \wedge (\neg B \to \neg A) \equiv A \to B$

ב) $A \leftrightarrow B \longrightarrow$ גרירה דו-כיוונית בשונה מא׳.

טענת גרירה

טענות נפוצות במתמטיקה.

אם (משהו) אז (משהו אחר) $A \to B$. בד״כ מסמנים $A \Rightarrow B$ כדי להדגיש שהטענה אמיתית. איך אם לא עשו זאת:

א) להוכיח: בהנחה ש-A נכון, גם B נכון.

ב) להפריך את הטענה ע״י מתן דוגמא נגדית - ש-A נכון ו-B לא נכון.

תרגיל

האם משני הנתונים:

א. אם אני מנגן בחצוצרה אז אני לא מנגן בתופים ובפסנתר יחד.

ב. אם אני לא מנגן בחצוצרה אז אני לא מנגן בפסנתר.

ניתן להסיק: אני לא מנגן בפסנתר אז אני מנגן בתופים.

A - חצוצרה, B - תופים C - פסנתר

א) $A \to \neg(B \wedge C) \equiv A \to \neg B \vee \neg C$

ב) $\neg A \to \neg C \equiv C \to A$

מסקנה? $\neg C \to B \equiv \neg B \to C$

פתרון:

דוגמא נגדית: נניח ש A, B, C הם F, נקבל בפסוקים א' וב' T

אך במסקנה נקבל F

תרגיל

האם משני הנתונים:

א. אם אני מנגן בחצוצרה אז אני לא מנגן בתופים ובפסנתר יחד.

ב. אם אני לא מנגן בחצוצרה אז אני לא מנגן בפסנתר.

ניתן להסיק: אם אני מנגן בפסנתר אז אני לא מנגן בתופים.

A - חצוצרה, B - תופים C - פסנתר

א) $A \to \neg(B \wedge C) \equiv A \to \neg B \vee \neg C$

ב) $\neg A \to \neg C \equiv C \to A$

מסקנה $C \to \neg B \equiv B \to \neg C$

אם אני מנגנת בפסנתר לפי ב', מנגנת בחצוצרה

בחצוצרה, לפי א' יוצא לא מנגנת בתופים או לא בפסנתר.

דרכי הוכחה:

כאשר רוצים להוכיח טענה, לפעמים יותר נח להוכיח ניסוח שקול (לוגית) אליה. דוגמאות נפוצות מוצגים בטענה הבאה:

- $(A \to B) \equiv (\neg B \to \neg A) \equiv ((\neg A) \vee B)$
- $A \equiv (\neg A \to F)$ (הנחה בשלילה)
- $(A \vee B) \equiv (\neg A \to B)$

דוגמאות מילוליות:

(א) "אם $\overbrace{\text{מישהו יכתוב בדיחה במבחן במקום תשובה}}^{A}$ אז $\underbrace{\text{הוא יקבל ניקוד חלקי}}_{B}$"

במקום להוכיח $A \to B$, אפשר להוכיח $\neg B \to \neg A$

כלומר אם מישהו לא קיבל ניקוד חלקי, סימן שלא כתב בדיחה במקום תשובה.

(ב) "הגובה שלי נמוך מ-3 מטר"

אפשר להוכיח "הגובה שלי לפחות 3 מטר" ולהגיע לסתירה.

למשל "אם הגובה שלי לפחות 3 מטר, הראש שלי היה נוגע בתקרה. כיוון שלא נוגע בתקרה, זו סתירה ולכן אינני בגובה 3 מטר"

הכרחי: אם א' הכרחי לב' ← ב' יכולה להתקיים רק אם א' מתקיים

מספיק: א' מספיק לב' ← ב' תתקיים אם א' מתקיימת

תרגיל

השלם את המשפט הבא: כדי שירד גשם _הכרחי_ שיהיו עננים בשמים. לכן אם נסמן ע"י "יש עננים בשמים = A", "יורד גשם = B" נקבל "A_←_B".

פרדיקטים וכמתים

אטומים ← קבועים, ללא משתנים

פרדיקטים ← פונקציות התלויות במשתנים.

לדוג': $S(x)$ ← פרדיקט המביע ש-x הוא סטודנט (מה זה אומר?)

אטומים יכולים להיות T או F, פרדיקטים תלויים במשתנים

דוגמא: $S(x,y)$ כש- $x<y$

$x=1,\ y=2\quad S(x,y)\quad T$

$x=2,\ y=2\quad S(x,y)\quad F$

בנוסף, ניתן להוסיף כמתים: לכל ($\forall$) וקיים ($\exists$)

$S(x)$ מקבל אמת אם x חרוץ

$\forall x\ S(x)$ — **כל סטודנט הוא יצור חרוץ**

$\exists x\ S(x)$ — **קיים סטודנט שהוא יצור חרוץ**

הצרן: לכל מספר p גדול מ-1: (p ראשוני) אמ"מ (אם הוא מחלק מכפלת מספרים אז הוא מחלק את אחד המספרים).

דילגנו בשיעור – פתרון במערך התרגול math-wiki

הערה: אחרי שמכמתים על כל משתני הפרדיקט מקבלים פסוק ללא משתנים.

הערה: שמות המשתנים אינם חשובים למשל עבור הפרדיקט $S(x, y)$ המוגדר $x \leq y$ הפסוק $\forall x \forall y S(x, y)$ הוא זהה לפסוק $\forall t \forall s S(t, s)$

הערה: סדר הכמתים בן משתנה (לפעמים) למשל $\exists x \forall y S(x, y)$ לא שקול לפסוק $\forall y \exists x S(x, y)$

(סירים ומכסים)

x-סיר y- מכסה $S(x,y)$ מקבל אמת שהמכסה מתאים

תרגיל $(\mathbb{Q},\mathbb{N})$

נגדיר פרדיקט $R(x, z, y)$ המביע כי $x < z < y$.

האם הפסוק $\forall x \forall y \exists z : (x < y) \rightarrow R(x, z, y)$ אמיתי?

דילגנו בשיעור – פתרון במאגר התרגול math-wiki

שלילת פסוקים

בשלילת פסוקים, הכמתים "לכל" ו-"קיים" מתחלפים זה עם זה

"לכל אדם בעולם קיים דג עם מספר קשקשים כגיל האדם או שאורכו עשירית מאורך האדם"

- "**קיים** אדם כך ש**לא** קיים דג עם מספר קשקשים כגיל האדם או שאורכו עשירית מאורך האדם"

נמשיך:

- "קיים אדם ש**לכל** דג בעולם **לא נכון** ש(יש לו מספר קשקשים כגיל האדם או שאורכו עשירית מאורך האדם)"

כלומר

- "קיים אדם שלכל דג בעולם יש מספר קשקשים שונה מגיל האדם וגם אורכו של הדג שונה מעשירית אורך האדם"

הערה: הסדר חשוב! מה משמעות הבאים:

$\forall n\in\mathbb{N}\ \exists m\in\mathbb{N}: n<m$ ✓ לכל מס' טבעי n יש m טבעי שגדול ממנו

$\exists m\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}: n<m$ ✗ קיים מס' טבעי m שגדול מכל n טבעי