תרגול 12-אושרית

דטרמיננטות

דטרמיננטות:

תהי $A\in \mathbb{F}^{n\times n}$. כל תמורה $\sigma\in S_n$ מגדירה בחירת n מקומות ב-A:

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}$$

דוגמה:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}\underline{a_{11}}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&\underline{a_{23}}\\a_{31}&\underline{a_{32}}&a_{33}\end{pmatrix}$$

איזה אינדקסים נבחרים?

$$a_{1\sigma(1)}\ a_{2\sigma(2)}\ a_{3\sigma(3)}$$
$$a_{11}\quad a_{23}\quad a_{32}$$

הגדרה: דטרמיננטה- $A\in \mathbb{F}^{n\times n}$, אזי-

$$\det(A)=|A|=\sum_{\sigma\in S_n}\text{sign}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\dots a_{n\sigma(n)}$$

הערה: פחות מפחיד ממה שנראה.

דוג: (לשימוש בהמשך)

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$S_2 = \{ \underbrace{id}_{\text{זוגי}}, \underbrace{(1\ 2)}_{\text{אי-זוגית}} \}$

$|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

שיטה נוחה יותר לפיתוח דטרמיננטה

פיתוח דטרמיננטה לפי מינורים:

הגדרה: $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. המינור ij של A הוא המטריצה M_{ij} מגודל $(n-1)\times(n-1)$ המתקבלת ע"י מחיקת השורה ה-i והעמודה ה-j ב-A.

דוגמה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

חשבו את M_{11}, M_{22} ו-M_{23}.

פתרון:

$M_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ — נוריד שורה ראשונה ועמודה ראשונה

$M_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ — נוריד שורה 2 עמודה 2

$M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ — נוריד שורה שניה עמודה 3

הגד' דטרמיננטה בפיתוח לפי שורה i:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |M_{ij}|$$

הגד' דטרמיננטה בפיתוח לפי עמודה j:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |M_{ij}|$$

הערה: זו דט' הקלאסית של סדר 2x2

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{il} \\ a_{kj} & a_{kl} \end{vmatrix} = a_{ij} \cdot a_{kl} - a_{il} \cdot a_{kj}$$

דוג: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & -1 \end{pmatrix}$ סימני המטריצה $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 32 + 2 \cdot 24 = 15$$

נפתח לפי שורה 1

הערה: תמיד כדאי לנו לבחור את השורה/בעמודה של הכי הרבה אפסים.

משפט: A הפיכה $\longleftrightarrow$ הדטרמיננטה שלה לא מתאפסת.

תרגיל:

בדוק אילו מהמטריצות הבאות הפיכות כאשר $a,b\in\mathbb{R}$

$$|A| = \left|\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}\right| = ab - ab = 0$$

ולכן A לא הפיכה לכל $a,b\in\mathbb{R}$

$$|B| = \left|\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right| = a^2+b^2$$

לכן B הפיכה כאשר $a\neq 0$ או $b\neq 0$.

תכונות הדטרמיננטה:

מכפלת איברי האלכסון

1) אם ב-A שורת אפסים/עמודת אפסים אזי - $\det(A)=0$

2) אם A משולשית (ובפרט אלכסונית) אזי - $\det(A)=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

3) כפליות הדטרמיננטה - $|AB|=|A|\cdot|B|$, ובפרט, חזקות $|A^m|=|A|^m$ ובפרט -

$$|A^{-1}|=|A|^{-1}$$

4) פעולות שורה ועמודה משפיעות על הדטרמיננטה, כלומר - למטריצות שקולות שורה לאו דווקא תהיה אותה דטרמיננטה.

נתבונן על הסימונים הבאים -

E_{ij} = מטריצה שמחליפה בין השורה i ל- j.

$E_{\alpha j}$ = מטריצה שמכפילה ב- α שורה j

$E_{i+\alpha j}$ = מטריצה שמוסיפה כפולת שורה j לשורה i

$\Leftarrow$

$$|E_{ij}\cdot A| = -|A|$$

$$|E_{\alpha j}\cdot A| = \alpha|A|$$

$$|E_{i+\alpha j}\cdot A| = |A|$$

5) $|\alpha A| = \alpha^n|A|$ כאשר ב- A n שורות.

6) $|A| = |A^t|$

תרגיל: יהיו A,B מטריצות כך שידוע כי $|A|=2$ חשב $|((A)^{-1})^{t}|$, $|(B^{-1}AB)^{9}|$, $|B^{-1}AB|$

פתרון:

$$|(A^{-1})^{t}| = |A^{-1}| = |A|^{-1} = 2^{-1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$|B^{-1}AB| \underset{\text{כפליות det}}{=} |B^{-1}||A||B| \underset{\text{אלו סקלרים ולכן חילופיים}}{=} \underbrace{|B|^{-1}|B|}_{1}|A| = |A| = \boxed{2}$$

$$|(B^{-1}AB)^{9}| \underset{\text{כפליות det}}{=} |B^{-1}AB|^{9} = \boxed{2^{9}}$$

תרגיל: הוכיחו - כי לכל A מעל $\mathbb{C}$ עם דטרמיננטה שונה מ-0 קיים $c\in\mathbb{C}$ כך ש- $|cA|=1$

פתרון: $|A|\neq 0$ ולכן - קיים $b\in\mathbb{C}\neq 0$ כך ש- $|A|=b$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{b}|A|=1$ $\Leftarrow$ $\left|\sqrt[n]{\frac{1}{b}}\cdot A\right|=1$

$\Leftarrow$ נבחר $c=\sqrt[n]{\frac{1}{b}}$ והוא - תמיד קיים כי מדברים מעל $\mathbb{C}$.

תרגיל: חשבו -

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha & \dots & 1 \\ \vdots & & & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \alpha \end{vmatrix}$$

כלומר דטרמיננטה של מטריצה שאיברי האלכסון שלה הם α וכל שאר איברי המטריצה הם 1.

פתרון:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \alpha & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \alpha \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1 = R_1 + \sum_{i=2}^{n} R_i} \begin{vmatrix} \alpha+n-1 & \alpha+n-1 & \dots & \alpha+n-1 \\ 1 & \alpha & & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \alpha \end{vmatrix} \Longleftrightarrow (\alpha+n-1) \begin{vmatrix} 1 & \dots & & 1 \\ 1 & \alpha & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & & \alpha \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{i \neq j} - R_1} (\alpha+n-1) \begin{vmatrix} 1 & \dots & & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)^{n-1} \cdot (\alpha+n-1)$$

מחסרים מכל
השורות
במטריצה
כפולים של
השורה מכפלה

כאשר מדובר
על מטריצה משולשית
ולכן הדטרמיננטה
היא מכפלת איברי האלכסון

כמו מכפלת איברי האלכסון

תרגיל: A מטריצה (מסדר n) ממשית והפיכה המקיימת $A^4+2A=0$

מצא- $|A|=?$ מותר להביע ע"י n.

$$A^4+2A=0 \Rightarrow A^4=-2A \Rightarrow \det(A^4)=\det(-2A) \Rightarrow \det(A^4)=(-2)^n\det(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det(A^4)-(-2)^n\det(A)=0 \Rightarrow \det(A)\cdot\left[\det(A^3)-(-2)^n\right]=0$$

$$\det(A)=0 \qquad\qquad \det(A^3)-(-2)^n=0$$

~~[illegible]~~ אבל- נתון כי A הפיכה כלומר- $\det(A)\neq 0$

$\Leftarrow$

$$\det(A^3)=(-2)^n$$

$\Leftarrow$

$$\boxed{\det(A)=(-2)^{n/3}}$$

תרגיל: תהיינה A,B מטריצות $n\times n$ כאשר n אי זוגי, מעל שדה שאינו ממאפיין 2.
נתון - שמתקיים $AB+BA=0$. הוכיחו - שלפחות 1 מהמטריצות A או B לא הפיכה.

פתרון:

$$AB+BA=0 \Rightarrow -BA=AB \Rightarrow \det(-BA)=\det(AB) \Rightarrow \det(A)\cdot\det(B)=\underbrace{(-1)^{2k+1}}_{-1}\det(B)\cdot\det(A)$$

$\Leftarrow$ $2\det(A)\cdot\det(B)=0$ $\Leftarrow$ $\det(A)=0$ או $\det(B)=0$

$\Leftarrow$ לפחות 1 מהמטריצות A,B לא הפיכה.

דטרמיננטה של העתקה לינארית:

V מ"ו, B בסיס ל-V. $T:V\to V$ ה"ל. $|T| = |[T]_B|$ ואינה תלויה בבחירת הבסיס.

תרגיל: יהיו- $T,S:V\to V$ ה"ל. הוכיחו-

1) T הפיכה $\Longleftrightarrow$ $\det(T)\neq 0$

2) $\det(ST)=\det(S)\cdot\det(T)$

פתרון:

1) T הפיכה $\Longleftrightarrow$ המטריצה המייצגת שלה הפיכה. $\Longleftrightarrow$ הדטרמיננטה שלה $\neq 0$ $\Longleftrightarrow$ $\det(T)\neq 0$

2) $|S||T| = |[S]_B\circ[T]_B| = |[S\circ T]_B| = |S\circ T|$

סוד ההוכחות טמון במטריצות מייצגות העתקה...

פחות מחשבים לפי ההגדרה ישירות
ש"ב: לחשב את הadj של הדוגמא לפי הגדרה

המטריצה הצמודה (adjoint):

הגד: תהא $A \in F^{n\times n}$ אזי:

$$adj(A) = (b_{ij}) = \left((-1)^{i+j}|M_{ji}|\right)$$

משפט (ללא הוכחה):

1) $\det(A)\cdot I = A\cdot adj(A)$

2) אם A הפיכה אזי: $A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)}$

דוג: תהא $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ מצאו את A^{-1}, $\det(A)$, $adj(A)$.

פתרון: ראשית- נחשב $\det(A)$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 16 - 1\cdot(5+24) = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 16 & -1 & 8 \\ -10 & 1 & -5 \\ 29 & -2 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow adj(A) = \det(A)\cdot A^{-1} = \frac{1}{3}\cdot 3\begin{pmatrix} 16 & -1 & 8 \\ -10 & 1 & -5 \\ 29 & -2 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -1 & 8 \\ -10 & 1 & -5 \\ 29 & -2 & 16 \end{pmatrix}$$

תרגיל: אם A מטריצה שאיבריה מס' שלמים וגם האיברים של A^{-1} הם שלמים, אז- $|A|^{2000}=1$

פתרון:

אם איברי המטריצה שלמים, אז גם הדטרמיננטה שלה שלמה (הרי היא סכום של מכפלות של שלמים). באופן דומה - גם הדטרמיננטה של ההופכית שלמה.

$$1=|I|=|A\cdot A^{-1}|=|A|\cdot|A^{-1}|$$

אבל השלמים היחידים שמכפלתם היא 1 הם ±1

$$|A|^{2000}=(\pm1)^{2000}=\boxed{1} \Leftarrow |A|=\pm1 \Leftarrow$$

תרגיל: תהי A מטריצה ששורותיה ת"ל.

א) הוכח/הפרך: כל מינור של המטריצה מקיים $|A_{ij}|=0$

ב) תהי A מטריצה אנטיסימטרית כך ש- $|A-I|=2$ חשב את $|A^2+2A+I|$

פתרון:

א) הפרכה $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$ $|A_{11}|=2\neq0$

אנטיסימטרית

ב) $|A^2+2A+I|=|(A^2+2A+I)^t|=|A^2-2A+I|=|(A-I)^2|=|A-I|^2=2^2=\boxed{4}$

בהצלחה!!!