03/02/15

83-110 אלגברה לינארית להנדסה – פתרון מועד א'

מרצה: ארז שיינר

מתרגלים: אחיה בר-און וביאנה פרידמן

- משך המבחן **3 שעות**.
- כל חומר עזר אסור פרט למחשבון.
- יש לפתור את כל השאלות **על גבי דפי הבחינה**.
- המחברת הינה לטיוטה בלבד ולא תיבדק.
- כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

חלק א'

1. (20 נק') יהי V מרחב וקטורי, ויהיו $W,U\subseteq V$ תתי מרחבים של V.
הוכיחו כי $W\cup U$ תת מרחב של V אם ורק אם $W\subseteq U$ או $U\subseteq W$.

הוכחה מההרצאה

חלק ב'

2. (20 נק') תהי סדרה המוגדרת על ידי

$$a_1=1,a_2=0$$
$$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$$

מצאו את a_{2015}.

רמז: מצאו מטריצה A עבורה $A\begin{pmatrix}a_n\\a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_{n+2}\end{pmatrix}$

נסמן $A=\begin{pmatrix}0&1\\2&1\end{pmatrix}$ נשים לב כי מתקיים $A^{2013}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{2014}\\a_{2015}\end{pmatrix}$.

הפולינום האופייני של A הוא $f_A(x)=(x+1)(x-2)$

המרחבים העצמיים הם $N(-I+A)=span\{(-1,1)\}$ ו $N(-I+A)=span\{(-1,2)\}$

לכן המטריצה A לכסינה ומתקיים $\begin{pmatrix}0&1\\2&1\end{pmatrix}=PDP^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1\\-1&-1\end{pmatrix}$

נעלה בחזקה

$$\begin{pmatrix}0&1\\2&1\end{pmatrix}^{2013}=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&2^{2013}\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2^{2013}\\-1&-2^{2014}\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2+2^{2013}&1+2^{2013}\\2+2^{2014}&-1+2^{2014}\end{pmatrix}$$

ולכן $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2+2^{2013} & 1+2^{2013} \\ 2+2^{2014} & -1+2^{2014} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{2014} \\ a_{2015} \end{pmatrix}$

וביחד $a_{2015} = \dfrac{2+2^{2014}}{3}$

.3

א. (15 נק') תהי $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י $T(a,b,c) = (a+b-3c, a-2c, b-c)$

חשבו את $\ker T \cap \operatorname{Im} T$

המטריצה המייצגת את ההעתקה היא $[T] = \begin{pmatrix} | & | & | \\ Te_1 & Te_2 & Te_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

נדרג את המטריצה ונקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן $KerT = N([T]) = span\{(2,1,1)\}$

כמו כן, $\operatorname{Im} T = C([T]) = span\{(1,1,0),(1,0,1)\}$

קל לראות כי $(1,1,0)+(1,0,1)=(2,1,1)$ ולכן $KerT \subseteq \operatorname{Im} T$

ולכן $KerT \cap \operatorname{Im} T = KerT = span\{(2,1,1)\}$

(כמובן שהיה אפשר לחשב את החיתוך בכל דרך אחרת).

ב. (15 נק') מצאו עבור אילו ערכי a המטריצה $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ הפיכה.

הביעו את $|2A^{-1}|$ באמצעות a, בהנחה כי A הפיכה.

נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה

$$\left|\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1-a^2 & 1-a \\ a-1 & 1-a \end{vmatrix} = (1-a^2)(1-a)-(1-a)(a-1) =$$

$$= (1-a)(1-a^2-a+1) = (a-1)^2(a+2)$$

לכן A הפיכה אם ורק אם $a \neq 1,-2$

כמו כן, $|2A^{-1}| = 2^3|A^{-1}| = \frac{8}{|A|} = \frac{8}{(a-1)^2(a+2)}$

<u>חלק ג'</u>

4.

א. (10 נק') **הוכיחו/הפריכו:** אם A^2 לכסינה אז A לכסינה.

הפרכה: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

A אינה לכסינה כיוון שזה בלוק ז'ורדן מגודל 2. A^2 אלכסונית ולכן בפרט לכסינה.
(כל אלכסונית היא לכסינה, כיוון שכל מטריצה דומה לעצמה: $D=IDI$).

ב. (10 נק') יהי V ממ"פ. לכל קבוצה $S \subseteq V$ נגדיר $S^{\perp}=\{v \in V \mid \forall s \in S : v \perp s\}$.

הוכיחו כי $S^{\perp}$ הוא תת מרחב של V.

ראשית, נוכיח כי וקטור האפס שייך ל $S^{\perp}$.

אכן, $\forall s \in S :< 0_V, s >= 0$ ולכן $\forall s \in S : 0_V \perp s = 0$ ולכן $0_V \in S^{\perp}$

שנית, יהיו שני וקטורים $v,u \in S^{\perp}$ ויהי סקלר α צריך להוכיח כי $v+\alpha u \in S^{\perp}$

אכן, לכל וקטור $s \in S$ מתקיים כי

$$< v+\alpha u, s >=< v, s > +\alpha < u, s >= 0+\alpha \cdot 0 = 0$$

ולכן $v+\alpha u \perp s$

וסה"כ $v+\alpha u \in S^{\perp}$

5.

א. (5 נק') תהי מטריצה $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו כי 0 ע"ע של A אם ורק אם A אינה הפיכה.

0 הוא ע"ע של A אם"ם $f_A(0)=0$ אם"ם $|0\cdot I - A|=0$ אם"ם $|A|=0$ אם"ם A אינה הפיכה.

ב. (15 נק') תהי מטריצה $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש $\dim C(A)=1$ וקיים וקטור $0\neq v\in\mathbb{R}^n$ עבורו $Av=v$.
הוכיחו כי A לכסינה ומצאו אלכסונית הדומה לה.

כיוון ש$\dim C(A)=1$ נובע ש $\dim N(A)=n-1$
אבל $N(0\cdot I - A)=N(-A)=N(A)$ ולכן 0 הינו ע"ע מריבוי גאומטרי $n-1$, ולכן הריבוי האלגברי שלו הוא לפחות $n-1$.

בנוסף, כיוון ש $Av=v$, נובע ש1 הוא גם ע"ע של A.

כיוון שסכום הריבויים האלגבריים לא יכול להיות גבוה מ n, נובע ש1 הוא ע"ע מריבוי אלגברי 1 ולכן ריבוי גאומטרי 1, ו0 הוא ע"ע מריבוי אלגברי $n-1$ וריבוי גאומטרי $n-1$.

לכן הפולינום האופייני הוא $f_A(x)=x^{n-1}(x-1)$, מתפרק לגורמים לינאריים, והריבוי האלגברי של כל ע"ע שווה לריבוי הגאומטרי שלו.

סה"כ, המטריצה A לכסינה, ודומה למטריצה האלכסונית $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$