מרצה: משה לוינשטיין
אתר: www.cs.biu.ac.il\~89-220
ספר: Introduction to Algorithms, Cormen, Loiserson, Rivest, Stein
ציון: 85% מבחן סופי, 15% תרגילים

אלגוריתמים

3 בנובמבר 2011

דוגמה

קלט: מערך A של מספרים.
פלט: איבר בעל ערך המכסימום
מדד: מס' ההשוואות הדרושות.
מספר השוואות: $n-1$.
אי אפשר לעשות את זה בפחות השוואות.

נשנה קצת את הבעיה:

פלט: מכסימום, מינימום
ניתן לפתור את הבעיה עם אלגוריתם הלוקח $2n-2$ השוואות. האם אפשר לעשות את זה בפחות?

שיטה 1 עוברים על המערך, כשבכל פעם שומרים את המינימום והמקסימום. אם המספר הבא יותר גדול מהמכסימום, לא צריך לבדוק אותו מול המינימום.
המקרה הטוב הוא כאשר הסדרה עולה, ואז עושים $n-1$ השוואות. המקרה הרע הוא סדרה יורדת, ואז יש $2n-2$ השוואות.

הפרד ומשול

- מפרקים את הבעיה לתתי־בעיות.
- פותרים את תתי הבעיות(רקורסיבית)
- מסיקים פתרון לבעיה(הכללית) מפתרונות של התתי בעיות.

נשתמש בשיטת הפרד ומשול על הדוגמה

נפרק את המערך לשני חלקים, כאשר בכל חלק נמצא(רקורסיבית) את המינימום והמקסימום שלו: $\begin{matrix} M \leftarrow \max\{M_1, M_2\} \\ m \leftarrow \min\{m_1, m_2\} \end{matrix}$.

```
MM(i,j)
    if j=i+1
```

```
    if A[i]≥A[j] then return(A[i],A[j])
    else return(A[j],A[i])
else
    k← ⌊(i+j)/2⌋
    (M_1,m_1) ← MM(i,k)
    (M_2,m_2) ← MM(k+1,j)
    return(min{M_1,M_2}, min{m_1,m_2})
```

$T(n)$ - מספר ההשוואות שMM מבצע על קלט באורך n.

$$T(n)=\begin{cases}1 & n=2\\ 2T\left(\frac{n}{2}\right)+2 & n>2\end{cases}$$

$$T(n)=2T\left(\frac{n}{2}\right)+2=2\left(2T\left(\frac{n}{4}\right)+2\right)+2=4T\left(\frac{n}{4}\right)+4+2=4\left(2T\left(\frac{2}{8}\right)+2\right)+4+2=\ldots$$

נראה שהנוסחה הולכת לכיוון $2^kT\left(\frac{n}{2^k}\right)+\sum_{j=l}^{k}2^j$, אבל זהו רק ניחוש. כדי להוכיח אותה צריך לבדוק באינדוקציה. עבור $n=2$ זה נכון. נניח שזה נכון עבור k, ונוכיח עבור $k+1$:

$$\cdots=2^k\left(2T\left(\frac{n}{2^{k+1}}\right)+2\right)+\sum_{j=1}^{k}2^j=2^{k+1}T\left(\frac{n}{2^{k+1}}\right)+2^{k+!}+\sum_{j=1}^{k}2^j=2^{k+1}T\left(\frac{n}{2^{k+1}}\right)+\sum_{j=1}^{k+1}2^j$$

נמצא את הערך המקסימלי שניתן לשים בk:

<u>נתון</u>: $T\left(n\right)=2^kT\left(\frac{n}{2^k}\right)+\sum_{j=1}^{k}2^j$. <u>רוצים</u>: $\frac{1}{2^k}=2\Leftrightarrow n=2^{k+1}\Leftrightarrow \log n=k+1$
$\Leftrightarrow k=\log n-1$

$$T(n)=2^{\log n-1}T\left(2\right)+\sum_{j=1}^{\log n-1}2^j=\frac{n}{2}\cdot 1+n-2=\left(1.5\right)n-2$$

$$2^{\log n-1}=2^{\log n}2^{-1}$$

מיון מיזוג

<u>קלט</u>: מערך A של n מספרים.
<u>פלט</u>: A ממוין.

1. מחלקים את המערך לשני חלקים - A_1, A_2.
ממיינים(רקורסיבית) את A_1.
ממיינים רקורסיבית את A_2
2. ממזגים את A_1 וA_2.

מספר ההשוואות למיון מיזוג למערך באורך n: $T\left(n\right)=\begin{cases} 0 & n=1\\ 2T\left(\frac{n}{2}\right)+n & n>1 \end{cases}$.

$$T\left(n\right)=2T\left(\frac{n}{2}\right)+n=2\left(2T\left(\frac{n}{4}\right)+\frac{n}{2}\right)+n=4T\left(\frac{n}{4}\right)+n+n=4T\left(\frac{n}{4}\right)+2n=2^{k}T\left(\frac{n}{2^{k}}\right)+kn$$