הרצאה 6 30.3.2020

הגדרה R חוג חילופי, $P\triangleleft R$ ראשוני אם

$ab\in P \Rightarrow a\in P$ או $b\in P$.
$a,b\in R$

טענה יהי R חוג חילופי, $P\triangleleft R$ אידאל. התנאים הבאים שקולים.

א) P ראשוני.

ב) R/P תחום שלמות.

ג) יהיו $I,J\triangleleft R$. אם $IJ\subseteq P$ אזי $I\subseteq P$ או $J\subseteq P$.

הוכחה א)$\Leftrightarrow$ב) בפעם הקודמת.

א)$\Rightarrow$ג) נניח P ראשוני, $IJ\subseteq P$. נניח בשלילה כי $I\not\subseteq P$, $J\not\subseteq P$. אזי יהיו $i\in I$, $j\in J$, $i\notin P$, $j\notin P$. אך $ij\in IJ\subseteq P$. בסתירה לראשוניות.

ג)$\Rightarrow$א) יהיו $ab\in P$. יהי $I=(a)$, $J=(b)$ אז $IJ=(ab)$.
$ab\in P \Rightarrow IJ\subseteq P$.
לפי ג), $a\in I\subseteq P$ או $b\in J\subseteq P$.

הגדרה יהי F שדה. קבוצה $X \subseteq F^n$ נקראת אלגברית אם קיימים פולינומים

$$f_1, f_2, \dots, f_r \in F[x_1, \dots, x_n]$$

כך ש- $X = \{(a_1,\dots,a_n) \in F^n \mid f_i(a_1,\dots,a_n)=0$ לכל $1 \le i \le r\}$.

אי-דוגמה $\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : y = \sin x\} \subseteq \mathbb{R}^2$

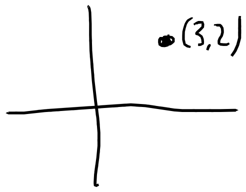
לא אלגברית.

דוגמאות

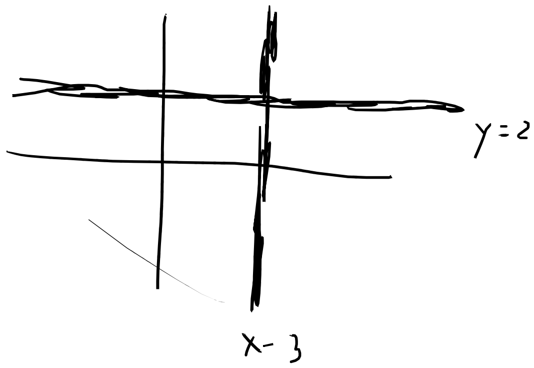
$\{(3,2)\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$x-3$

$y-2$



$(x-3)(y-2)$



לכל $I \trianglelefteq F[x_1,\dots,x_n]$, יהי $V(I) = \{(a_1,\dots,a_n) \in F^n \,/\, f(a_1,\dots,a_n)=0 \ \forall f \in I\}$.

$$X = \{(a_1,\dots,a_n)\in F^n \mid f_1(\dots)=0, \dots, f_r(a_1,\dots,a_n)=0\} =$$

$$V((f_1,\dots,f_r)) = X$$

$(f_1,\dots,f_r) =$ אידאל הנוצר ע"י $f_1,\dots,f_r$

בהינתן קבוצה אלגברית $X\subset F^n$
נגדיר אידיאל

$$I(X)=\{f\in F[x_1,\dots,x_n] \mid f(a_1,\dots,a_n)=0 \text{ לכל } (a_1,\dots,a_n)\in X\}$$

$$\triangleleft\, F[x_1,\dots,x_n].$$

$$V((x^3))=V((x))$$

<u>הגדרה</u> אידיאל $I\triangleleft R$ נקרא רדיקלי אם
לכל $a\in R$, $n\in\mathbb{N}$, $a^n\in I \Rightarrow a\in I$.

<u>משפט האפסים של הילברט</u> יהי F שדה סגור אלגברית (לדוגמא $F=\mathbb{C}$). אזי יש התאמה חח"ע בין

$$\left\{\begin{array}{c}\text{אידיאלים}\\ \text{רדיקליים}\\ I\triangleleft F[x_1,\dots,x_n]\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{קבוצות}\\ \text{אלגבריות}\\ \text{ב-}F^n\end{array}\right\}$$

$$I \longmapsto V(I)$$

$$I(X) \longleftarrow X.$$

המשפט לא נכון אם F לא סגור אלג'

לדוגמא $F=\mathbb{R}$

$$I=(x^2+y^2+1)$$

$$\mathbb{R}^2 \supseteq V(I)=\emptyset = V(\mathbb{R}[x,y])$$

<u>הגדרה</u> קב' אלגברית $X\subseteq F^n$ נקראת אי-פריקה

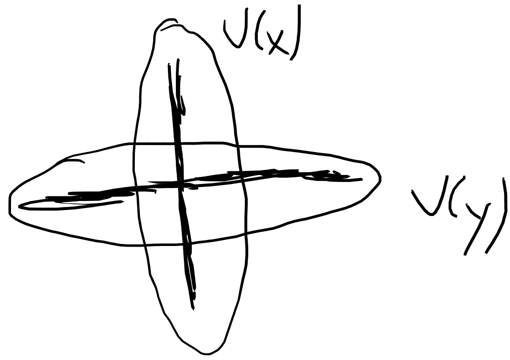
אם $X=X_1\cup X_2$, X_1, X_2 אלגבריות,

$\Leftarrow$ $X=X_1$ או $X=X_2$.

<u>דוגמאות</u> $\{(3,2)\}\subseteq\mathbb{R}^2$ אי-פריקה.

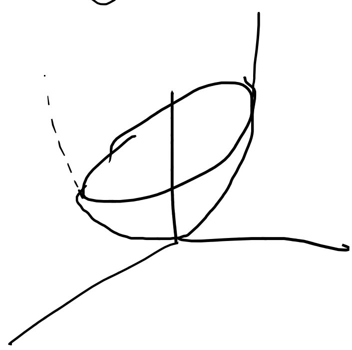
$$V(xy)$$

$$=V(x)\cup V(y)$$



$$V(z-x^2-y^2)\subseteq\mathbb{R}^3$$

אי-פריק.



שים לב: $V(I+J)=V(I)\cap V(J)$

$V(IJ)=V(I)\cup V(J)$

<u>אנגיל</u> טופולוגיה על F^n

הקבוצות הסגורות הן הקבוצות האלגבריות.

טופ׳ זריצקי.

<u>טענה</u> F שדה, $X\subseteq F^n$ קב׳ אלגברית.

אזי X אי-פריקה $\iff$ $I(X)$ ראשוני.

<u>הוכחה</u> $\Leftarrow$) נניח X אי-פריקה.

נניח $f,g\in F[x_1,\dots,x_n]$ כך ש- $fg\in I(X)$. זה אומר שבכל

נקודה $(a_1,\dots,a_n)\in X$ או $f(a_1,\dots,a_n)=0$

או $g(a_1,\dots,a_n)=0$.

זה אומר $X\subseteq V(fg)=$

$V(f)\cup V(g)$

זה אומר

$$X=X\cap V(fg)=\underbrace{(X\cap V(f))}_{\text{אלגברית}}\cup\underbrace{(X\cap V(g))}_{\text{אלגברית}}$$

אבל הנחנו כי X אי-פריקה. לכן

$$f\in I(X) \Leftarrow X\subseteq V(f) \Leftarrow X = X\cap V(f)$$

או

$$g\in I(X) \Leftarrow X\cap V(g)$$

לכן $I(X)$ ראשוני.

($\Longrightarrow$) נניח $I(X)$ ראשוני. יהי $X = X_1\cup X_2$.

$$\underbrace{I(X_1)I(X_2)}_{\text{כל פולי' כאן מתאפס בכל נק' גם של } X_1 \text{ וגם של } X_2} \subseteq I(X)$$

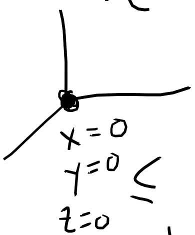
הנחנו $I(X)$ ראשוני $\Leftarrow$ $I(X_1)\subseteq I(X)$ $\Leftarrow$

$$X_1 = X \Leftarrow X_1 \supseteq X$$

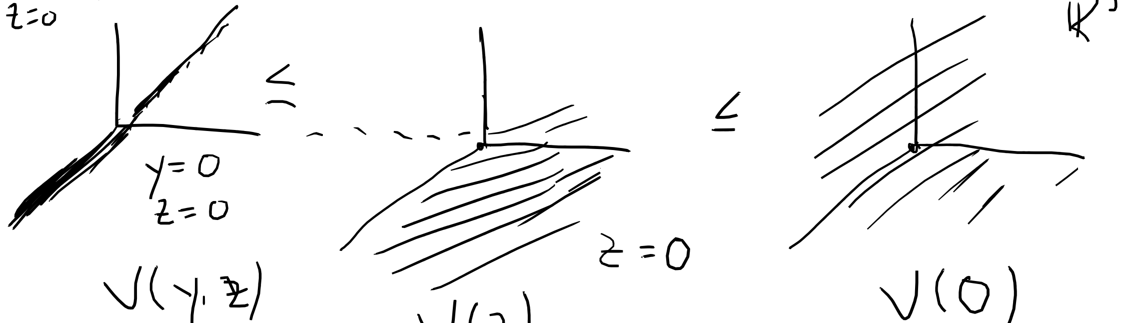
או $I(X_2)\subseteq I(X) \Leftarrow X_2 = X$. לכן

X אי-פריקה.

שאלה: אין לנו את המושג הגיאומטרי של מימד לאורך החוקים.



$V(x,y,z) \subseteq$



$V(y,z) \quad V(z) \quad V(0)$

כל הקבוצות האלה אי-פריקות.

לדוגמא, המישור אי-פריק כי $I(\text{מישור}) = (z)$

$$\mathbb{R}[x,y,z]/I \simeq \underbrace{\mathbb{R}[x,y]}_{\text{תחום שלמות}}$$

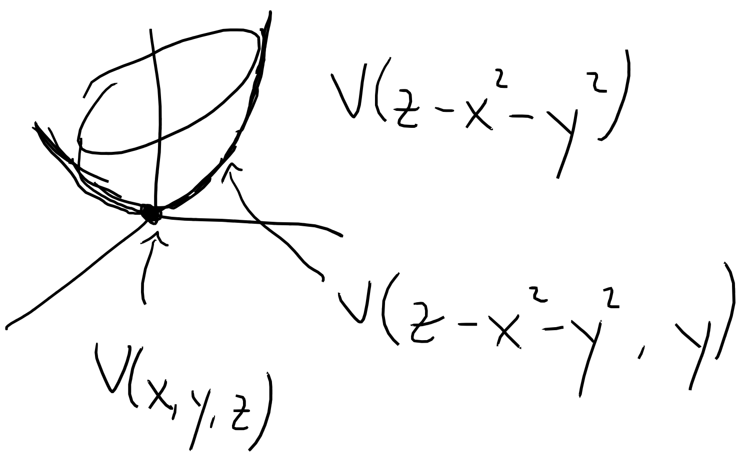
לכן I ראשוני.

אכן, נתבונן בהומ'

$$\varphi : \mathbb{R}[x,y,z] \to \mathbb{R}[x,y]$$
$$f(x,y,z) \mapsto f(x,y,0)$$

φ על

$\ker\varphi = (z)$



<u>הגדרה</u> קב' אלג' אי-פריקה X היא n-מימדית

אם n זה המספר המקסימלי כך שקיימת

שרשרת של קבוצות אי-פריקות

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \dots \subsetneq X_n = X.$$

לכל $X \subseteq F^n$ אלגברית נגדיר את חוג הקואורדינטות

$$A(X) = F[x_1,\dots,x_n] / I(X)$$

<u>אינט'</u> משגל? הראשוני' הרבי'

$$\left\{ \overset{\text{אידאלים}}{L \trianglelefteq R/I} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \overset{\text{אידאלים}}{I \subseteq J \trianglelefteq R} \right\}$$

ההטלה הטבעית $\varphi : R \to R/I$

$$J \longmapsto \varphi(J)$$

$$L \longmapsto \varphi(L)$$

J ראשוני $\Leftrightarrow$ L ראשוני

Kdim R

<u>הגדרה</u> יהי R חוג חילופי. מימד קרול Krull של R הינו המספר n הכי גדול כך שקיימת שרשרת של אידאלים ראשוניים

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$$

(תזכורת: אידאל ראשוני הינו אמיתי לפי הגדרה)

מימד של X = מימד קרול של $A(X)$

$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n = X$ $\leftrightsquigarrow$ $I(X_n) \subsetneq \cdots \subsetneq I(X_0)$

אי-פריקים   אידיאלים ראשוניים

$(\sim)$

$(0) \subsetneq \cdots \subsetneq I(X_0)/I(X_n)$

שרשרת של אידיאלים ראשוניים

של

$A(X) = F[x_1,\dots,x_n]/I(X)$.

<u>תזכורת</u> R חילופי נקרא תחום ראשי אם R תחום שלמות וכל אידיאל $I \trianglelefteq R$ הינו ראשי $I=(a)$.

<u>טענה</u> אם R תחום ראשי $\underbrace{}_{R \text{ לא שדה}}$ $\Leftarrow$ $\mathrm{Kdim}\, R = 1$.

<u>הוכחה</u> הוכחנו בפעם הקודמת שכל אידיאל ראשוני $(0) \neq P \leq R$ הוא מקסימלי. לכן אין שרשראות ארוכות מ- $(0) \subsetneq P$

הגדרה R חוג חילופי.

1) R נקרא נתרי (Noetherian) אם כל סדרה עולה של אידאלים

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots$$

מתייצבת, כלומר קיים n כך ש-

$$I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \cdots$$

2) R נקרא ארטיני (Artinian) אם כל סדרה יורדת

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq I_4 \supseteq \cdots$$

מתייצבת.

דוגמא $\mathbb{Z}$ נתרי אך לא ארטיני.

$$2\mathbb{Z} \supsetneq 4\mathbb{Z} \supsetneq 8\mathbb{Z} \supsetneq 16\mathbb{Z} \supsetneq \cdots$$

משפט הופקינס-לויצקי כל חוג ארטיני הינו נתרי.

טענה כל תחום ראשי הינו נותרי.

הוכחה תהי

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$$

שרשרת עולה של אידאלים. יהי

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

אזי I הינו אידאל. כיון R תחום ראשי

$\Leftarrow$ $I=(a)$. אזי $a \in \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

$\Leftarrow$ קיים k כך ש- $a \in I_k$. אזי

$$I_k \supseteq (a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

$$I_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

$$I_k = I_{k+1} = I_{k+2} = \dots$$

הסדרה מתייצבת.

תוצאה $\mathbb{Z}$ נותרי.