פתרון תרגיל בית 6 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשע"ח

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. הגישו את התרגיל בתרגול שלכם בשבוע המתחיל בתאריך 31.12.2017.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. תהי G חבורה ותהי $H \lhd G$ תת־חבורה נורמלית. הפריכו את הטענות השגויות הבאות:

א. אם G/H ציקלית ולא טריוויאלית, אז G אבלית.

ב. אם G/H סופית ולא טריוויאלית, אז G סופית.

פתרון.

א. נבחר $G = S_3$ ואת $H = A_3$ שראינו בכיתה שהיא נורמלית ב-S_3. החבורה G/H מסדר 2 (שהוא ראשוני) ולכן ציקלית. אבל G אינה אבלית.

ב. נבחר $G = \mathbb{Z}$ ואת $H = 2\mathbb{Z}$. אז $G/H \cong \mathbb{Z}_2$ מסדר 2, אבל G אינסופית.

שאלה 2. מצאו את הסימן של התמורה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 2n & 1 \end{pmatrix} \in S_{2n}$$

פתרון. בכתיב של מכפלת מחזורים זרים, התמורה היא המחזור $(1, 2, 3, \ldots, 2n)$, והוא מאורך זוגי. לכן הסימן הוא -1 והתמורה אי-זוגית.

שאלות להגשה

פתרו לפחות **שלוש** שאלות מתוך השאלות הבאות. מומלץ לנסות ולהגיש תשובות נוספות, כי גם אם לא מקבלים עליהן ניקוד, עדין מקבלים עליהן משוב.

שאלה 3. תהי G חבורה ותהינה H, K תת־חבורות נורמליות המקיימות $H \cap K = \{e\}$. הוכיחו כי G איזומורפית לתת־חבורה של $G/K \times G/H$.

פתרון. נתבונן בהעתקה: $f \colon G \to G/K \times G/H$ המוגדרת לפי

$$f(g) = (gH, gK)$$

תחילה יש להוכיח שזהו הומומורפיזם. אכן, לכל $g_1, g_2 \in G$ מתקיים

$$f(g_1g_2) = (g_1g_2H, g_1g_2K) = (g_1H, g_1K)(g_2H, g_2K) = f(g_1)f(g_2)$$

כשהשיוויון האמצעי נובע מהנורמליות של H, K. יהי $g \in \ker(f)$. כלומר מתקיים עבורו

$$f(g) = (gH, gK) = e_{G/K \times G/H} = (H, K)$$

ידוע לנו ש-$gH = H, gK = K$ אם ורק אם $g \in K$ וגם $g \in H$. כלומר

$$g \in H \cap K = \{e\}$$

אם כן, הגרעין של f הוא טריוויאלי ולכן f שיכון.

שאלה 4. בתרגיל הזה נראה שוב שאי אפשר לומר ששתי תמורות הן "צמודות סתם" מבלי לומר באיזו חבורה עובדים.

א. מצאו את מחלקת הצמידות של $A_4 \ni (132)$.

ב. תנו דוגמה לשתי תמורות שאינן צמודות ב-A_4, אבל כן צמודות ב-S_4. הוכיחו שהן גם צמודות ב-A_5. רמז: הביטו מעלה.

ג. הוכיחו שאם יש זוג תמורות שאינן צמודות ב-A_n, אך כן צמודות ב-S_n, אז הן גם צמודות ב-A_{n+2}.

פתרון.

א. מנוסחת ההצמדה ב-S_n אנחנו יודעים שכל התמורות הצמודות של (132) הן מחזורים מאורך 3. אבל במקרה זה, לא כל המחזורים מאורך 3 צמודים ל-(132). בפרט, אם $\sigma \in A_4$, אז

$$\sigma (132) \sigma^{-1} = (\sigma(1), \sigma(3), \sigma(2))$$

חישוב ב-A_4 יראה כי מחלקת הצמידות היא $\{(234), (143), (124), (132)\}$.

ב. לפי החישוב בסעיף הקודם, התמורה (123) לא צמודה ל-(132) ב-A_4, אבל לפי מיון מחלקות הצמידות ב-S_n התמורות האלו צמודות ב-S_4. נחפש $\tau \in A_5$ כך ש-

$$\tau (132) \tau^{-1} = (\tau(1), \tau(3), \tau(2)) = (123)$$

אם נבחר את (23) נקבל שהתמורות צמודות, אך $A_5 \notin (23)$. לכן נבחר $\tau = (23)(45)$ ונקבל שהן אכן צמודות, וגם ש-τ זוגית. דוגמה אחרת: מהצמדה בתמורה (14532) נקבל את (142).

ג. אם $a, b \in A_n$ לא צמודות ב-A_n, אך כן צמודות ב-S_n, אז קיימת $\sigma \in S_n$ כך ש-$\sigma a \sigma^{-1} = b$. בודאי ש-$\sigma \notin A_n$ שכן הנחנו כי a, b לא צמודות ב-A_n. לכן התמורה $\sigma \cdot (n+1, n+2)$ היא זוגית (מכפלה של שתי תמורות אי זוגיות) ובהצמדה של a נקבל

$$\sigma \cdot (n+1, n+2)\, a\, (\sigma \cdot (n+1, n+2))^{-1} = (n+1, n+2)(n+1, n+2)\, \sigma a \sigma^{-1} = b$$

ונעזרנו בכך ש-$(n+1, n+2)$ מתחלפת עם σ ועם a, כי אין להם מספרים משותפים שהן מזיזות. לכן a, b צמודות ב-A_{n+2}.

שאלה 5. נראה שאיזומורפיות בתת־חבורות נורמליות ובחבורות המנה ביחד עדין לא גורר איזומורפיות בחבורה "למעלה".

א. תנו דוגמה לחבורה אבלית G_1, לתת־חבורה שלה $H_1 \lhd G_1$, לחבורה לא אבלית G_2 ולתת־חבורה שלה $H_2 \lhd G_2$, כך ש-$H_1 \cong H_2$ וגם ${}^{G_1}\!/_{H_1} \cong {}^{G_2}\!/_{H_2}$. רמז: אפשר לבחור את G_1, G_2 להיות מסדר 6 או 8.

ב. כמו בסעיף הקודם, אבל הפעם נדרוש ששתי החבורות G_1, G_2 הן אבליות ולא איזומורפיות. רמז: אפשר לבחור חבורות מסדר p^3.

פתרון.

א. כמו ברמז נבחר $G_1 = \mathbb{Z}_6$ ו-$G_2 = S_3$. ראינו שלשתיהן יש תת־חבורות מסדר 3, $H_1 = \langle 2 \rangle = \{0,2,4\}$ ו-$H_2 = A_3$. תת־החבורות H_i הן מאינדקס 2, ולכן נורמליות ב-G_i, בהתאמה. כל חבורה מסדר 3 איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_3$ וחבורות המנה ${}^{G_i}\!/_{H_i}$ הן מסדר $\frac{6}{3} = 2$, ולכן איזומורפיות ל-$\mathbb{Z}_2$. לכן $H_1 \cong \mathbb{Z}_3 \cong H_2$ וגם ${}^{G_1}\!/_{H_1} \cong \mathbb{Z}_2 \cong {}^{G_2}\!/_{H_2}$.
בחירה פופלרית אחרת הייתה החבורות $G_1 = \mathbb{Z}_8$ ו-$G_2 = D_4$.

ב. למעשה לכל p ראשוני אפשר לבחור חבורות מסדר p^2. למשל נבחר את $G_1 = \mathbb{Z}_9$ ואת $G_2 = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ שהן לא איזומורפיות (הראשונה ציקלית והשנייה לא). לשתיהן תת־חבורות מסדר 3 (למשל $\langle 3 \rangle \leq G_1$ ו-$\langle (1,0) \rangle \leq G_2$), וחבורות המנה לגביהן תהינה מסדר 3. נקבל שוב ש-$H_1 \cong \mathbb{Z}_3 \cong H_2$, והפעם גם חבורות המנה איזומורפיות שתיהן ל-$\mathbb{Z}_3$.

שאלה 6. נתבונן בחבורה $G = {}^{\mathbb{Q}}\!/_{\mathbb{Z}}$.

א. הוכיחו שהסדר של כל איבר ב-G הוא סופי, אבל שישנם איברים בחבורה מסדר גדול כרצוננו.

ב. יהיו $x_1, x_2 \in G$. הראו שתת־החבורה $H = \langle x_1, x_2 \rangle$ היא ציקלית וסופית. רמז: הציגו את x_1, x_2 כמחלקות שמאליות, ואז נסו להבין כיצד נראה איבר כלשהו ב-H.

ג. מצאו קבוצת איברים $S \subseteq G$ כך שתת־החבורה $K = \langle S \rangle$ היא אינסופית וגם $K \neq G$. רמז: למה S חייבת להיות אינסופית?

פתרון.

א. איבר היחידה בחבורה G הוא המחלקה $\mathbb{Z} = \mathbb{Z} + 0$. לכן יש למצוא לכל $x \in G$ מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ כך שנקבל $n \cdot x + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. שימו לב כי החבורה חיבורית ולכן למציאת הסדר "העלאה בחזקה" היא כפל ב-n.
כל איבר בחבורה אפשר לרשום בצורה $x = \frac{a}{b} + \mathbb{Z}$ עבור $b \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$. מכאן קל לראות כי $b \cdot \left(\frac{a}{b} + \mathbb{Z}\right) = a + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. לכן x הוא לכל היותר מסדר (סופי) b. נניח כי $\frac{a}{b}$ הוא שבר מצומצם, ולכן הסדר של x במקרה זה הוא בדיוק b. ברור שסדרת השברים $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ מתאימה לסדרה של איברים ב-G שסדרם עולה ממש.
מינוח: החבורה G היא דוגמה לחבורה מפותלת מאקספוננט אינסופי.

ב. האיברים ב-G הם מחלקות שמאליות של $\mathbb{Z}$ ב-$\mathbb{Q}$. כלומר אם $x_i \in G$ עבור $i \in \{1,2\}$, אז קיימים $b_i \in \mathbb{N}$ ו-$a_i \in \mathbb{Z}$ כך ש-$x_i = \frac{a_i}{b_i} + \mathbb{Z}$. מפני ש-$G$ היא מנה של החבורה $\mathbb{Q}$ שהיא אבלית, אז גם G אבלית. לכן יש לנו תיאור נוח לאיברים בתת־חבורה הנוצרת על ידי קבוצת איברים:

$$\begin{aligned} H &= \left\{ k_1 \left(\frac{a_1}{b_1} + \mathbb{Z} \right) + k_2 \left(\frac{a_2}{b_2} + \mathbb{Z} \right) \,\middle|\, k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ \frac{k_1 a_1 b_2 + k_2 a_2 b_1}{b_1 b_2} + \mathbb{Z} \,\middle|\, k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \left\langle \frac{1}{b_1 b_2} + \mathbb{Z} \right\rangle \end{aligned}$$

כלומר H מוכלת בתת־חבורה ציקלית. ראינו בסעיף הקודם שהסדר של כל איבר הוא סופי. לכן הסדר של כל תת־חבורה ציקלית של G היא סופית, ולכן H סופית. בנוסף, כל תת־חבורה של חבורה ציקלית היא ציקלית, ולכן H ציקלית.

ג. אפשר לבחור את $S = \left\{ \frac{1}{5^i} + \mathbb{Z} \,\middle|\, i \in \mathbb{N} \right\}$, או את $S' = \left\{ \frac{1}{p} + \mathbb{Z} \,\middle|\, p \text{ prime} \wedge p \neq 7 \right\}$.
קל לראות כי $\langle S \rangle$ ו-$\langle S' \rangle$ אינסופיות כי יש בהן איברים מאינסוף סדרים שונים. בפירוט: ב-S האיבר $\frac{1}{5^i} + \mathbb{Z}$ הוא מסדר 5^i, ויש אינסוף בחירות עבור i. ב-S' האיבר $\frac{1}{p} + \mathbb{Z}$ הוא מסדר p, וישנם אינסוף ראשוניים השונים מ-7.
תת־החבורות האלו הן לא כל G מפני ששתיהן לא מכילות את האיבר $\frac{1}{7} + \mathbb{Z}$. אילו היה ניתן להציג אותו כמכפלה של היוצרים והופכיהם, אז

$$\frac{1}{7} + \mathbb{Z} = \left(\frac{1}{b_1} + \mathbb{Z} \right)^{\pm 1} \cdots \left(\frac{1}{b_k} + \mathbb{Z} \right)^{\pm 1} = \frac{a}{\operatorname{lcm}(b_1, \ldots, b_k)} + \mathbb{Z}$$

כאשר $\frac{1}{b_i} + \mathbb{Z}$ שייכים ל-S או S' ו-$a \in \mathbb{Z}$ מתאים (השבר באגף ימין לאו דווקא מצומצם). אבל $\operatorname{lcm}(b_1, \ldots, b_k)$ לא מתחלק ב-7 לפי בחירת S ו-S', וזה לא ייתכן כי כל נציג אחר של $\frac{1}{7} + \mathbb{Z}$ כשבר מצומצם הוא מן הצורה $\frac{7a'+1}{7} + \mathbb{Z}$ עבור $a' \in \mathbb{Z}$.
תשובה לרמז: הסיבה היא שכל תת־חבורה של G הנוצרת על ידי מספר סופי של איברים היא סופית, ואפילו ציקלית.

שאלה 7.

א. מצאו כמה הומומורפיזמים $f\colon \mathbb{Z}_2 \to S_6$ קיימים. רמז: שאלה 3 בתרגיל בית 4.

ב. מצאו כמה הומומורפיזמים $f\colon \mathbb{Z}_{25} \to A_8$ קיימים, ומהו $\ker f$ של כל אחד מהם.

פתרון.

א. החבורה $\mathbb{Z}_2$ ציקלית, ולכן הומומורפיזם שהיא התחום שלו נקבע לחלוטין לפי תמונה של יוצר. במילים אחרות, נניח $\mathbb{Z}_2 = \langle a \rangle$, אז $f(a^i) = f(a)^i$ לכל i. הסדר של $f(a)$ צריך לחלק את הסדר של a, לפי תרגיל שעשינו בכיתה. כל בחירה באיבר $f(a)$ כזה אכן מגדירה הומומורפיזם שונה. לפיכך האפשרויות עבור $o(f(a))$ הן $1, 2$.
אם $o(f(a)) = 1$, אז מדובר בהומומורפיזם הטריוויאלי, כי יש רק איבר אחד מסדר 1. אם הסדר של $f(a)$ הוא 2, אז בעזרת הרמז אנחנו יודעים שיש 75 איברים מסדר 2 ב-S_6. לכן בסך הכל יש $75 + 1 = 76$ הומומורפיזמים $f\colon \mathbb{Z}_2 \to S_6$.

ב. באופן דומה לסעיף הקודם, אנו צריכים לדעת לאן נשלח יוצר של החבורה הציקלית $\mathbb{Z}_{25}$. נניח $\mathbb{Z}_{25} = \langle a \rangle$, אז האפשרויות עבור $o(f(a))$ הן $1, 5, 25$.
אם $o(f(a)) = 1$, שוב מדובר בהומומורפיזם הטריוויאלי. במקרה זה $\ker f = \mathbb{Z}_{25}$, כי כל האיברים נשלחים לאיבר היחידה. אם הסדר של $f(a)$ הוא 5, אז יש למצוא כמה איברים מסדר 5 יש ב-A_8. איבר מסדר 5 ב-A_n הוא מכפלה של מחזורים זרים שכולם מאורך 5. בחבורה A_8 אפשר "להכניס" רק מחזור אחד באורך 5. יש $\binom{8}{5}(5-1)!$ מחזורים מאורך 5 ב-A_8 לפי התרגיל שעשינו בכיתה (ולכן גם מספר כזה של איברים מסדר 15). לפי משפט האיזומורפיזם הראשון, הגרעין הוא מסדר 5 ויש ל-$\mathbb{Z}_{25}$ רק תת־חבורה אחת מסדר זה, ולכן $\ker f = 5\mathbb{Z}_{25}$. אין איברים מסדר 25 ב-$A_8$, ולכן בסך הכל יש $\binom{8}{5}(5-1)! + 1 = 1345$ הומומורפיזמים $f\colon \mathbb{Z}_{25} \to A_8$.

שאלה 8. תהי G חבורה שבה לכל $x, y \in G$ מתקיים $(xy)^{2018} = x^{2018} y^{2018}$. נסמן שלוש תת־קבוצות

$$A = \left\{ g^{2018} \,\middle|\, g \in G \right\}$$
$$B = \left\{ g^{2017} \,\middle|\, g \in G \right\}$$
$$C = \left\{ g \,\middle|\, g \in G, g^{2018} = e \right\}$$

א. הוכיחו $A, B, C \lhd G$. צריך להוכיח שהן תת־חבורות, וגם שהן נורמליות. רמז: כדאי לא לעבוד קשה ולהיעזר בהומומורפיזמים.

ב. הוכיחו שכל איברי A מתחלפים עם כל איברי B. באופן שקול, הוכיחו שלכל $x,y\in G$ מתקיים $x^{2018}y^{2017}=y^{2017}x^{2018}$.

ג. הוכיחו שלכל $g,h\in G$ מתקיים $[g,h]^{2018\cdot 2017}=e$ כאשר $[g,h]=ghg^{-1}h^{-1}$.

פתרון.

א. רוב התשובות לסעיף זה הוכיחו "לפי הגדרה" שתת־הקבוצות בשאלה הן תת־חבורות. כלומר שהן לא ריקות, סגורות לפעולה וסגורות לפעולה. את הנורמליות הוכיחו לפי זה שהן נשמרות תחת הצמדה באיברי G.
ישנה דרך נוספת, שהיא יותר קצרה: נשים לב שההעתקה $f\colon G\to G$ המוגדרת לפי $f(g)=g^{2018}$ היא הומומורפיזם לפי הנתון בשאלה. נחשב שהגרעין של f הוא בדיוק $\ker f=C$, ולכן C היא תת־חבורה נורמלית. זהו, לא צריך יותר כלום עבור C.
נחשב גם שהתמונה של f היא $\operatorname{im} f=A$, ולכן $A\leq G$. את הנורמליות של A נוכיח לפי הצמדה. יהי $x\in G$ ויהי $a\in A$, כך ש-$a=g^{2018}$. נרצה להראות $xax^{-1}\in A$. נראה שמדובר באיבר של G בחזקת 2018 לפי

$$xax^{-1}=xg^{2018}x^{-1}=xgx^{-1}xgx^{-1}\ldots xgx^{-1}=\left(xgx^{-1}\right)^{2018}$$

כלומר $xax^{-1}\in A$, ולכן $A\lhd G$.
עבור B נצטרך להתאמץ קצת יותר. נגדיר העתקה $\phi:G\to G$ לפי $\phi(g)=g^{-2017}$. נבדוק שזהו הומומורפיזם:

$$\begin{aligned}\phi(xy)=(xy)^{-2017}&=\left(y^{-1}x^{-1}\right)^{2017}=xx^{-1}\left(y^{-1}x^{-1}\right)^{2017}y^{-1}y\\&=x\left(x^{-1}y^{-1}\right)^{2018}y=xx^{-2018}y^{-2018}y=x^{-2017}y^{-2017}=\phi(x)\phi(y)\end{aligned}$$

והתמונה שלו היא $\operatorname{im}\phi=B^{-1}=B$, כי אם $b\in B$, אז קיים g כך ש-$b=g^{2017}$, ולכן $b^{-1}=\left(g^{-1}\right)^{2017}$ (כלומר גם $b^{-1}\in B$). לכן $B\leq G$. את הנורמליות של B מוכיחים בצורה דומה להוכחת הנורמליות של A.

ב. נעזר בנתון בשאלה שלכל $x,y\in G$ מתקיים $(xy)^{2018}=x^{2018}y^{2018}$ וגם לפי הסעיף הקודם $(xy)^{2017}=y^{2017}x^{2017}$ כי

$$(xy)^{2017}=\phi((xy)^{-1})=\phi(y^{-1}x^{-1})=\phi(y^{-1})\phi(x^{-1})=y^{2017}x^{2017}$$

לכן

$$x^{2018}y^{2017}=xx^{2017}y^{2017}=x\,(yx)^{2017}=y^{-1}yx\,(yx)^{2017}=y^{-1}\,(yx)^{2018}=y^{2017}x^{2018}$$

כלומר $f(x)\phi(y^{-1})=\phi(y^{-1})f(x)$, ולכן גם $f(x)\phi(y)=\phi(y)f(x)$.

ג. נעזר בזהויות מהסעיף הקודם ונחשב

$$\begin{aligned}\left(ghg^{-1}h^{-1}\right)^{2018\cdot 2017}&=\left(\left(ghg^{-1}h^{-1}\right)^{2018}\right)^{2017}=\left((gh)^{2018}\left(g^{-1}h^{-1}\right)^{2018}\right)^{2017}\\&=\left(g^{-1}h^{-1}\right)^{2018\cdot 2017}(gh)^{2018\cdot 2017}\\&=\left(g^{-2018}h^{-2018}\right)^{2017}\left(g^{2018}h^{2018}\right)^{2017}\\&=h^{-2018\cdot 2017}g^{-2018\cdot 2017}h^{2018\cdot 2017}g^{2018\cdot 2017}\\&=\left(h^{-2017}\right)^{2018}\left(g^{-2018}\right)^{2017}h^{2018\cdot 2017}g^{2018\cdot 2017}\\&=g^{-2018\cdot 2017}h^{-2018\cdot 2017}h^{2018\cdot 2017}g^{2018\cdot 2017}=e\end{aligned}$$

או שנוכיח בעזרת ההומורפיזמים f ו-ϕ. קל לראות שהם מתחלפים, כי לכל $x \in G$ מתקיים

$$f(\phi(x)) = \left(x^{-2017}\right)^{2018} = \left(x^{2018}\right)^{-2017} = \phi(f(x))$$

ולכן

$$\begin{aligned}\left(ghg^{-1}h^{-1}\right)^{2018\cdot 2017} &= \left(\left(hgh^{-1}g^{-1}\right)^{2018}\right)^{-2017} = \phi\left(f\left(hgh^{-1}g^{-1}\right)\right)\\ &= \phi\left(f\left(h\right)f\left(g\right)f\left(h^{-1}\right)f\left(g^{-1}\right)\right)\\ &= \phi\left(f\left(h\right)\right)\phi\left(f\left(g\right)\right)\phi\left(f\left(h^{-1}\right)\right)\phi\left(f\left(g^{-1}\right)\right)\\ &= \phi\left(f\left(h\right)\right)f\left(\phi\left(g\right)\right)\phi\left(f\left(h^{-1}\right)\right)\phi\left(f\left(g^{-1}\right)\right)\\ &= \phi\left(f\left(h\right)\right)\phi\left(f\left(h^{-1}\right)\right)f\left(\phi\left(g\right)\right)f\left(\phi\left(g^{-1}\right)\right)\\ &= \phi\left(f\left(h\right)f\left(h^{-1}\right)\right)f\left(\phi\left(g\right)\phi\left(g^{-1}\right)\right) = \phi\left(e\right)f\left(e\right) = e\end{aligned}$$

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 9. יהי p ראשוני. נזכיר כי חבורה נקראת חבורת-p אם הסדר של כל איבר הוא חזקה של p. כמו כן ראינו שלחבורת-p סופית יש מרכז לא טריוויאלי. מצאו חבורת-p עם מרכז טריוויאלי.

הדרכה אפשרית (אם אתם מוצאים חבורות אחרות נשמח לשמוע): התבוננו על קבוצת המטריצות האינסופיות מעל $\mathbb{Z}_p$ מהצורה

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_\infty \end{pmatrix}$$

כאשר I_∞ היא מטריצת יחידה אינסופית, 0 היא מטריצת אפס בגודל מתאים והמטריצה $A \in GL_n(\mathbb{Z}_p)$ היא משולשית עליונה (סופית, עבור n טבעי כלשהו) עם אחדות על האלכסון. הסבירו למה כפל מטריצות עדין מוגדר כאן (זה חשוב שבכל שורה ובכל עמודה יש מספר סופי של איברים לא אפסיים), והסיקו שמתקבלת חבורה. הוכיחו שהסדר של כל איבר הוא חזקה של p וכדי להראות שהמרכז טריוויאלי העזרו בזהויות הבאות על מטריצות בלוקים סופיות:

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & M \\ 0 & I_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

שאלה 10. תהי G חבורה. נקרא לתת־חבורה של G נאותה אם היא מוכלת ממש ב-G.

א. הוכיחו ש-G אינה איחוד של שתי תת־חבורות נאותות. כלומר שאם $G = H \cup K$, אז $G = H$ או $G = K$.

ב. תנו דוגמה לחבורה מסדר 4 שהיא איחוד של שלוש תת־חבורות נאותות שלה.

ג. מעתה נניח כי G היא איחוד של שלוש תת־חבורות נאותות, $G = H_1 \cup H_2 \cup H_3$. הוכיחו כי חיתוך של כל שתיים מתת־החבורות שווה לחיתוך שלושתן $H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

ד. הוכיחו כי לכל $x \in G$ מתקיים $x^2 \in H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

ה. הסיקו כי $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \lhd G$.

ו. הוכיחו שהאינדקס של החיתוך ב-G הוא 4. הראו שחבורת המנה ביחס לחיתוך איזומורפית לדוגמה שנתתם בסעיף השני.

בהצלחה!