תרגיל בית 7 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א׳ תשע״ח

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת״ז ומספר קבוצת תרגול. הגישו את התרגיל בתרגול שלכם בשבוע המתחיל בתאריך 7.1.2018.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. תהי G חבורה ויהיו $A, B \subseteq G$ תת־קבוצות שלה. לכל סעיף כתבו פסוק לוגי שקול אך ורק עם כמתים (כמו $\forall$ ו-$\exists$) ושיוויונות מן הצורה $xy = zw$ עבור איברים של הקבוצות.

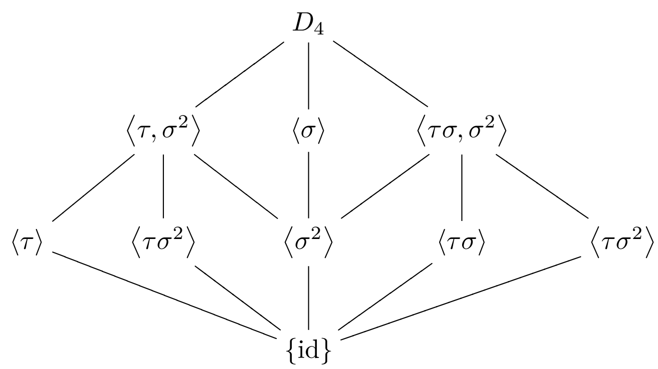
א. $ab = ba$ לכל איבר a של A ואיבר b של B.

ב. $aB = Ba$ לכל איבר a של A.

ג. $AB = BA$

נסו למצוא דוגמאות שמראות שיש הבדל בין הסעיפים השונים (מי גורר את מי?).

שאלה 2. לפניכם סריג תת־החבורות של D_4:



מצאו את סריג תת־חבורות של $D_4 / \langle \sigma^2 \rangle$ ואת כל המנות שלה בעזרת משפטי האיזומורפיזמים.

שאלות להגשה

פתרו לפחות **שלוש** שאלות מתוך השאלות הבאות. מומלץ לנסות ולהגיש תשובות נוספות, כי גם אם לא מקבלים עליהן ניקוד, עדין מקבלים עליהן משוב.

שאלה 3. תהינה $G_1, \ldots, G_n$ חבורות ותהינה $H_1, \ldots, H_n$ תת־חבורות נורמליות שלהן בהתאמה (כלומר $H_i \lhd G_i$ לכל i).

א. הוכיחו כי $H_1 \times \cdots \times H_n \lhd G_1 \times \cdots \times G_n$.

ב. הוכיחו כי $(G_1 \times \cdots \times G_n) \,/\, (H_1 \times \cdots \times H_n) \cong {}^{G_1}/_{H_1} \times \cdots \times {}^{G_n}/_{H_n}$.

שאלה 4. תהי $N \lhd G$ תת־חבורה נורמלית סופית, $H \leq G$ תת־חבורה מאינדקס סופי ונניח $([G:H], |N|) = 1$. הוכיחו כי $N \leq H$.

שאלה 5. נסמן כמה מטריצות מרוכבות הפיכות

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

שימו לב לא להתבלבל בתפקיד של 1 ושל i בתוך המטריצות שם הם מספרים מרוכבים, וכסימון למטריצות. נגדיר את חבורת הקווטרניונים להיות $Q = \langle i, j, k \rangle \leq GL_2(\mathbb{C})$.

א. בתאריך 16 באוקטובר 1843 חרט ויליאם רואן המילטון על גשר בְּרוּם

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

חשבו את טבלת הכפל של Q (עם הסברים קצרים). רמז: המילטון לא טעה, והחבורה סופית אחרי שמבינים שהאיברים הם רק $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$.

ב. הוכיחו שכל תת־החבורות של Q הן נורמליות (ואבליות, פרט ל-Q עצמה). רמז: בדקו מה יכול להיות האינדקס, ולמקרה היחיד שהוא קצת קשה העזרו בסעיף הקודם.

ג. הפריכו את הטענה הבאה: לכל חבורה אבלית A לחבורה $Q \times A$ יש רק תת־חבורות נורמליות. רמז: בחרו למשל את $A = \mathbb{Z}_4$ ותת־חבורה ציקלית מסוימת.

שאלה 6. לסעיף השני כדאי להעזר בשאלה 5.

א. תהי G חבורה שחיתוך כל תת־החבורות הלא טריוויאליות שלה אינו טריוויאלי. כלומר

$$\bigcap_{\substack{H \leq G \\ H \neq \{e\}}} H \neq \{e\}$$

נניח כי G פועלת על קבוצה X עבורה $|X| = k < |G|$. הוכיחו שלא קיים שיכון $\varphi\colon G \to S_k$.

ב. הסיקו כי אין שיכון $\varphi\colon Q \to S_k$ לכל $k < 8$, אבל הראו שיש שיכון $\varphi\colon Q \to S_8$.

שאלה 7 (קצת חזרה)**.** הפריכו או הביאו דוגמה לטענות הבאות:

א. קיים אפימורפיזם $f\colon \mathbb{Z}_{56} \to \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_8$.

ב. קיים מונומורפיזם $f\colon \mathbb{Z}_{40} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$.

ג. קיים איזומורפיזם $f\colon S_4 \to D_{12}$.

ד. קיים מונומורפיזם $f\colon A_5 \to \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_5 \times U_{14}$.

ה. קיים מונומורפיזם $f\colon A_4 \to D_{12} \times S_5$.

ו. קיים אפימורפיזם $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. רמז: הבינו למה מנה של חבורה ציקלית היא ציקלית.

שאלה 8. תהי G חבורה ותהי $H \leq G$. נגדיר את הליבה של H ב-G להיות

$$\mathrm{Core}(H) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$$

א. הוכיחו כי $\mathrm{Core}(H) \leq G$. רמז: יותר קל להתחיל בהוכחת $gHg^{-1} \leq G$ לכל $g \in G$.

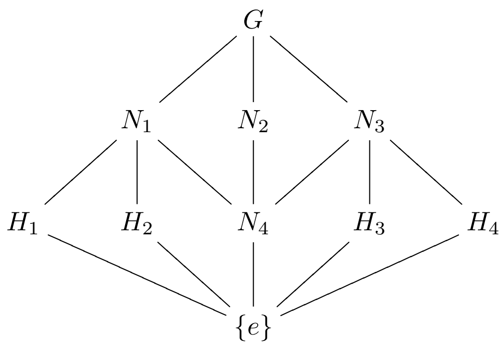
ב. הוכיחו ש-$\mathrm{Core}(H)$ היא תת־החבורה הנורמלית הגדולה ביותר של G שמוכלת ב-H.

ג. תנו דוגמה לחבורה G, ולשתי תת־חבורות לא טריוויאליות H, K (הן לא G ולא $\{e\}$) כך ש-$\mathrm{Core}(H) = \{e\}$ וגם $\mathrm{Core}(K) = K$.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 9. תהי חבורה G עם סריג תת־החבורות הבא:



כאשר G $H_i \leq G$ ו-$N_i \lhd G$. הוכיחו כי $G \cong D_4$.

רמז: סמנו $k = [G : N_1]$ והשתמשו כמה פעמים במשפטי האיזומורפיזמים. כנראה בדרך תצטרכו להוכיח ש-k ראשוני, ואז מוכרח להיות $k = 2$.

בהצלחה!