

מבנים אלגבריים להנדסה, 83-218, בוחן 3 תשפ"א

י' בתמוז ה'תשפ"א, 20.6.21

מרצה: פרופ' רון עדין.

מתרגל: אריאל ויצמן.

- מבנה הבוחן וניקוד: בבוחן חמישה סעיפים, כל סעיף שווה 20 נקודות. יש לענות על כל הסעיפים.
- הקפידו על סדר וניקיון.
- משך הבוחן: 80 דקות.
- חומר עזר: מחשבון.
- נמקו היטב את תשובותיכם!

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. (20 נק') תהינה G חבורה ציקלית, H חבורה, ויהי $\varphi : G \rightarrow H$ הומו. הוכיחו: $Im(\varphi)$ ציקלית.

2. (20 נק') יהי R חוג חילופי עם יחידה, ויהיו $a, b \in R$. הוכיחו או הפריכו: a, b הפיכים אם ורק אם ab הפיך.

3. נתבונן בחוג הפולינומים מעל \mathbb{R} :

$$R = \mathbb{R}[x] = \left\{ \sum_{k=0}^n a_k x^k \mid n \in \mathbb{N}, \forall k : a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

(א) (20 נק') נגדיר:

$$S = \left\{ \sum_{k=0}^n a_{2k} x^{2k} \mid n \in \mathbb{N}, \forall k : a_{2k} \in \mathbb{R} \right\}$$

הוכיחו: $S \leq R$ (כלומר, קבוצת הפולינומים שבהם לכל m אי-זוגי המקדם של x^m שווה לאפס היא תת-חוג של R).

(ב) (20 נק') האם $S \trianglelefteq R$ (כלומר, האם S אידאל של R)? נמקו.

(ג) נגדיר:

$$I = \left\{ \sum_{k=2}^n a_{2k} x^{2k} \mid n \in \mathbb{N}, \forall k : a_{2k} \in \mathbb{R} \right\}$$

(כלומר, קבוצת הפולינומים שבהם לכל m אי-זוגי או קטן מ-4 המקדם של x^m שווה לאפס).

i. (6 נק') הוכיחו: $I \leq S$ (כלומר, I תת-חוג של S).

ii. (7 נק') האם $I \trianglelefteq S$ (כלומר, האם I אידאל של S)? נמקו.

iii. (7 נק') האם $I \trianglelefteq R$ (כלומר, האם I אידאל של R)? נמקו.