

## שיעורי בית 6

26 בדצמבר 2016

1. תהא  $G$  חבורה ו  $H \trianglelefteq G$  תת חבורה נורמלית. הוכח/הפרך

(א) אם  $G$  ציקלית גם  $G/H$  ציקלית.  
**פתרון:** יהא  $g \in G$  יוצר אזי  $gH \in G/H$  יוצר. הוכחה: יהא  $g'H \in G/H$  לפי הגדרת  $g$  קיים  $n$  כך ש  $g^n = g'$  ואז

$$(gH)^n = g^n H = g'H$$

(ב) אם  $G/H$  ציקלית גם  $G$  ציקלית.  
**פתרון:** ניקח חבורה  $G$  שאינה חילופית (ולכן לא ציקלית). נגדיר  $H = G$  תת חבורה נורמלית. אזי  $G/H$  עם איבר יחיד ולכן ציקלית אבל החבורה  $G$  אינה ציקלית.

2. נתון:  $H_2 \trianglelefteq G_2$  וגם  $H_1 \trianglelefteq G_1$ . הוכח:

(א)  $(H_1 \times H_2) \trianglelefteq (G_1 \times G_2)$   
**פתרון:** יהא  $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$  ו  $(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$ . צריך להוכיח כי

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2)(g_1, g_2)^{-1} \in H_1 \times H_2$$

אכן, לפי הגדרת חבורת המכפלה  $G_1 \times G_2$

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2)(g_1, g_2)^{-1} = (g_1, g_2)(h_1, h_2)(g_1^{-1}, g_2^{-1}) = (g_1 h_1 g_1^{-1}, g_2 h_2 g_2^{-1})$$

כיון ש  $H_1$  נורמלית נקבל כי  $g_1 h_1 g_1^{-1} \in H_1$  ובגלל ש  $H_2$  נורמלית נקבל כי  $g_2 h_2 g_2^{-1} \in H_2$  ולכן

$$(g_1 h_1 g_1^{-1}, g_2 h_2 g_2^{-1}) \in H_1 \times H_2$$

(ב)  $(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \cong (G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$   
**פתרון:** נגדיר את הומומורפיזם ההטלה

$$\phi : G_1 \times G_2 \rightarrow (G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$$

ע"י

$$(g_1, g_2) \mapsto (g_1 H_1, g_2 H_2)$$

זהו הומו' על (בדקו!) נרצה להשתמש במשפט האיזו' הראשון. קודם נחשב את הגרעין של  $\phi$

$$\begin{aligned} \ker \phi &= \{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 : \phi((g_1, g_2)) = 0\} \\ &= \{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 : (g_1 H_1, g_2 H_2) = 0\} \\ &= \{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 : g_1 \in H_1, g_2 \in H_2\} = H_1 \times H_2 \end{aligned}$$

לפי משפט האיזו' הראשון נקבל את המבוקש.

3. תהא  $G$  חבורה ו  $N, K \trianglelefteq G$  שתי תתי חבורה נורמליות המקיימות  $N \cap K = \{e\}$ . הוכיחו כי

$$\forall x \in N, y \in K : xy = yx$$

[הדרכה: התבוננו ב  $x^{-1}y^{-1}xy$ ]

**פתרון:** יהא  $x \in N, y \in K$ . מהגדרת  $N$  חבורה נורמלית נקבל כי

$$y^{-1}xy \in N$$

ומסגירות בחבורה נקבל כי גם

$$x^{-1}y^{-1}xy \in N$$

באופן דומה, מנורמליות של  $K$  נקבל כי

$$x^{-1}y^{-1}x \in K$$

ועם סגירות

$$x^{-1}y^{-1}xy \in K$$

ולכן

$$x^{-1}y^{-1}xy \in K \cap N = \{e\}$$

ולכן

$$x^{-1}y^{-1}xy = e$$

שזה אומר

$$xy = yx$$

4. תהא  $G$  חבורה ו  $N \trianglelefteq G$  תת חבורה נורמלית המקיימת  $|G/N| = p$  כאשר  $p$  מספר ראשוני.

(א) הוכיחו לכל  $g \in G - N$  מתקיים כי  $g, g^2, \dots, g^p$  נציגים של מחלקות שונות ב  $G/N$  (ולכן  $G/N = \{g^i N : 1 \leq i \leq p\}$ )  
**פתרון:** כיוון ש  $N$  נורמלית  $G/N$  חבורה. כעת יהא  $g \in G - N$  אזי  $gN \in G/N$  שונה מהאיבר הנטרלי. נסתכל על תת החבורה הנוצרת על ידו ולכן גם היא שווה ל  $\langle gN \rangle \leq G/N$ . גודל תת חבורה זאת צריכה לחלק את סדר החבורה  $p = |G/N|$  ולכן גם היא שווה ל  $p$  (כי  $p$  ראשוני ו  $|\langle gN \rangle| > 1$ ). לכן בקבוצה  $\langle gN \rangle = \{g^i N : i \in \mathbb{N}\}$  יש  $p$  איברים שונים שהם  $\{g^i N : i = 1, \dots, p\}$  בפרט  $g, g^2, \dots, g^p$  נציגים של מחלקות שונות

(ב) הוכיחו כי אם בנוסף  $N \subseteq Z(G)$  (כלומר  $N$  מוכלת במרכז של  $G$ ) אזי  $G$  חבורה חילופית (או מילים אחרות  $Z(G) = G$ ).  
**פתרון:** יהא  $a, b \in G$ . מסעיף קודם נבחר  $g \in G - N$  ונקבל כי

$$G = \bigcup_{i=1}^p g^i N$$

כי  $G$  היא איחוד כל הקוסטים. אזי קיימים  $i, j$  כך ש  $a \in g^i N, b \in g^j N$  ואז קיימים  $n_1, n_2 \in N$  כך ש

$$a = g^i n_1, b = g^j n_2$$

כיוון שנתון  $N \subseteq Z(G)$  בפרט  $n_1, n_2$  מתחלפים עם כל איבר אחר ב  $G$  ואז

$$ab = g^i n_1 g^j n_2 = g^i g^j n_1 n_2 = g^j g^i n_1 n_2 = g^j n_2 g^i n_1 = ba$$

5. תהא  $G$  חבורה חילופית. נגדיר  $D = \{(g, g) : g \in G\} \subseteq G \times G$ . הוכיחו כי זהו תת חבורה נומאלית של  $G \times G$  והראו כי

$$G \times G / D \cong G$$

**פתרון:** טענה  $D$  היא תת חבורה. הוכחה  $(e, e) \in D$  לפי הגדרה ולכן הנטרלי שייך ל  $D$ . אם  $(g_1, g_1), (g_2, g_2) \in D$  אזי גם הכפל שלהם  $(g_1 g_2, g_1 g_2) \in D$ . אם  $(g, g) \in D$  אזי גם ההפוכי שלו  $(g^{-1}, g^{-1}) \in D$ . ולכן  $D$  תת חבורה.

טענה: היא גם נורמאלית. הוכחה: בחבורה חילופית, כל תת חבורה היא נורמלית.

כעת נגדיר

$$\phi : G \times G \rightarrow G$$

ע"י

$$(x, y) \rightarrow xy^{-1}$$

טענה זהו אפימורפיזם. הוכחה:

$$\phi((x, y)(z, w)) = \phi((xz, yw)) = xz(yw)^{-1} = xzw^{-1}y^{-1} = xy^{-1}zw^{-1} = \phi((x, y))\phi((z, w))$$

בנוסף לכל  $g \in G$  ניקח את  $(g, e)$  כמקור. כעת נחשב את הגרעין

$$\ker \phi = \{(x, y) \in G \times G : \phi(x, y) = e\} = \{(x, y) \in G \times G : xy^{-1} = e\} = \{(x, y) \in G \times G : x = y\} = D$$

לפי משפט האיזו' הראשון נקבל את המבוקש.

6. תהא  $G_1, G_2$  שתי חבורות עם סדרים זרים (כלומר  $\gcd(|G_1|, |G_2|) = 1$ ). הוכיחו

כי קיים הומו' אחד  $\phi : G_1 \rightarrow G_2$  [רמז: חישבו על התמונה  $\phi(G_1)$ ]  
**פתרון:** יהא  $\phi : G_1 \rightarrow G_2$  הומו'. אזי התמונה  $H = \text{Im}(\phi) \leq G_2$  היא תת חבורה של  $G_2$  ולכן  $\frac{|G_2|}{|H|} \in \mathbb{Z}$  לפי משפט לגרנז'. מצד שני לפי משפט האיזו' מתקיים כי

$$G_1/\ker \phi \cong H = \text{Im}(\phi)$$

אזי

$$\frac{|G_1|}{|\ker \phi|} = |H|$$

ואז

$$\frac{|G_1|}{|H|} = |\ker \phi| \in \mathbb{Z}$$

כלומר  $|H|$  מחלק גם את  $|G_1|$  וגם את  $|G_2|$ . כיוון שאלו מספרים זרים נקבל כי  $|H| = 1$  ולכן  $H = \{e_{G_2}\}$ . אם התמונה של ההומו' זה רק האיבר הנטרלי של  $G_2$  אזי מדובר בהומו' הטריאלי (ששולח כל איבר ב  $G_1$  לנטרלי של  $G_2$ ).

7. נגדיר  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  מעגל היחידה עם פעולת כפל. הוכיחו כי

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong G \quad (\text{א}) \quad \text{הדרכה: השתמשו בפונקציה } [e^{2\pi xi}]$$

**פתרון:** נגדיר את הפונקציה

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$$

ע"י

$$x \mapsto e^{2\pi xi}$$

נראה כי זהו אפימורפיזם: אכן

$$\phi(x_1 + x_2) = e^{2\pi i(x_1+x_2)} = e^{2\pi i x_1} e^{2\pi i x_2} = \phi(x_1)\phi(x_2)$$

והיא על כי לכל  $z \in G$  קיימת לו הצגה פולארית. כלומר  $z = e^{2\pi xi}$  עבור  $0 \leq x < 2\pi$  והוא יהיה מקור אפשרי אחד.

לפי משפט האיזו' נקבל כי

$$\mathbb{R}/\ker \phi \cong G$$

נותר להראות כי  $\ker \phi = \mathbb{Z}$ . אכן

$$\ker \phi = \{x \in \mathbb{R} : \phi(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} : e^{2\pi xi} = e^{2\pi 0i}\} = \mathbb{Z}$$

כי

$$e^{2\pi x_1 i} = e^{2\pi x_2 i} \iff x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$$

[זכרו: הפונקציה  $e^{2\pi xi}$  מחזורית  $2\pi$ ]

(ב) נגדיר  $H \leq G$  להיות כל שורשי היחידה מסדר כלשהו. כלומר

$$H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

כאשר  $U_n = \{z \in G : z^n = 1\}$  הם שורשי היחידה מסדר  $n$ . בעזרת סעיף קודם, הראו כי  $H$  איזומורפית ל  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$   
**פתרון:** הפונקציה

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow G$$

המוגדרת ע"י

$$x + \mathbb{Z} \mapsto e^{2\pi xi}$$

היא איזומורפיזם לפי סעיף קודם ובפרט חח"ע. אם נצמצם אותה לקבוצה  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  אזי נקבל מונומורפיזם

$$\phi : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow G$$

המוגדר ע"י

$$x + \mathbb{Z} \mapsto e^{2\pi xi}$$

כיוון ש

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \text{Img}(\phi) \leq G$$

נותר לחשב את  $\text{Img}(\phi)$ :

$$\text{Img}(\phi) = \{\phi(x + \mathbb{Z}) : x + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\} = \{\phi(x + \mathbb{Z}) : x \in \mathbb{Q}\} = \{e^{2\pi xi} : x \in \mathbb{Q}\} = \{e^{2\pi \frac{a}{b} i} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$$

$$H' = \{e^{2\pi \frac{a}{b} i} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\} = H$$

טענה:  $H' = H$ . הוכחה: ( $\subseteq$ ) אם נעלה את  $e^{2\pi \frac{a}{b} i} \in H'$  בחזקת  $b$  נקבל  $e^{2\pi ai} = 1$  ולכן  $e^{2\pi \frac{a}{b} i} \in U_b \subset H$

( $\supseteq$ ) יהא  $z \in H$  אזי קיים  $n \in \mathbb{N}$  כך ש  $z \in U_n$ . נרשום  $z = e^{2\pi xi}$  ההצגה הפולארית שלו אזי  $1 = z^n = e^{2\pi nxi}$  כלומר  $nx \in \mathbb{Z}$  מאותו נימוק מסעיף קודם. ומכאן ש  $x \in \mathbb{Q}$  ולכן  $z = e^{2\pi xi} \in H'$