מבנים אלגבריים
תרגיל 2

10 בנובמבר 2011

פתור את שאלות .4,5,7,10,11,16,17

1 חבורות למחצה

1. תהי S קבוצה. נגדיר פעולה $S \times S \to S$ לפי $a * b = b$. הראה כי $(S, *)$ היא חבורה למחצה.

2. תהי X קבוצה. נסמן ב-X^X את אוסף הפונקציות $X \longrightarrow X$ עם פעולת ההרכבה. הוכח כי זו חבורה למחצה.

3. קבע האם $\mathbb{R}$ עם הפעולה $(a * b) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ הוא חבורה למחצה.

4. תהי S חבורה למחצה ויהי $e \in S$, אם $ex = xe = x \; \forall x \in S$ נאמר כי e הוא **איבר יחידה**. הראה כי אם קיים איבר יחידה, אז הוא יחיד.

2 מונויד

הגדרה: חבורה למחצה עם איבר יחידה תקרא מונויד

5. תהי A קבוצה. הוכח כי $M = A^A = \{f : A \longrightarrow A\}$ עים הרכבה היא מונויד (שם לב לתרגיל 2; הוכח רק את התנאים הנוספים)

6. האם $\mathbb{R}^+ = \{x | x > 0\}$ עם חיבור מונויד ? ועם כפל ?

7. כתוב את לוח הכפל של כל המונוידים עם 2 אברים.

*8. כתוב את 7 לוחות הכפל של המונוידים עם 3 אברים.

3 מונויד־איברים הפיכים

הגדרה: יהי M מונויד עם איבר יחידה 1_m. נאמר כי איבר הוא הפיך אמ"ם קיים b כך ש $ab = ba = 1_m$

9. הראה שאם a הפיך אז b כנ"ל הוא יחיד.

10. יהי M מונויד. הראה כי אוסף כל האיברים ההפיכים ב־M הוא חבורה. נסמן אוסף זה ב־$U(M)$.

*11. תן דוגמא למונויד עם איברים b,a כך ש־ $ab = 1_m$ אבל b,a אינם הפיכים. (**רמז:** חשוב על $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$).

4 בדיחה בחבורות

הגדרה: חבורה היא מונויד שכל איבריו הפיכים.

מטריצת האפס הולכת למשחק כדורגל ופוגשת שם את המטריצות האלכסוניות. היא שואלת אותן: האם אני יכולה להסתובב איתכן ?
המטריצות האלכסוניות: מה פתאום ! את לא בחבורה...

12. מהי החבורה שהמטריצת האפס כל כך רוצה להיות חלק ממנה ? הוכח כי זו חבורה.

5 חבורות

13. הוכח כי $(\{\bar{0}, \bar{1}, ..., \overline{n-1}\}, +) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) = (\mathbb{Z}_n, +)$ (מספרים מודולו n) מהווים חבורה.

14. מצא את הסדר של כל איבר ב־$\mathbb{Z}_{12} = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

15. תהי G חבורה (מסדר סופי או אינסופי). הוכח כי לכל איבר $x \in G$ הסדר של x ו־x^{-1} שווה.

16. אם $x, g \in G$ איברים של G, הוכח כי הסדר של x ו־$g^{-1}xg$ שווה. הסק מכך כי הסדר של ba שווה לסדר של ab.

17. הוכח כי אם $x^2 = 1$ לכל $x \in G$ אז החבורה היא אבלית.

*18. הוכח כי בכל חבורה מסדר זוגי יש איבר מסדר 2. (זהו מקרה פרטי של משפט קושי שנלמד בהמשך. מקרה פרטי זה אפשר להוכיח על ידי טריק)