תרגיל 4

תרגיל 1. מצאו פתרון כללי למשוואות הבאות:

1. $y'' - y'y = 0$.

פתרון. נשים לב, ש x לא מופיע במשוואה, ולכן נשתמש בהצבה $y' = p(y)$ ו

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p.$$

המשוואה הופכת ל

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p - py = 0.$$

נעביר אגפים ונחלק ב p. נקבל:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = y$$

והפתרון שלה נתון על ידי

$$y' = \frac{y^2}{2} + c.$$

המשוואה הפכה ל

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2} + c.$$

נבצע החלפת משתנים y'. נעביר אגפים ונקבל:

$$\int \frac{dy}{\frac{y^2}{2} + c} = \int dx.$$

נתפל ב 3 מקרים: $c > 0$, $c = 0$ ו $c < 0$. כמו כן, נשים לב שאת המשוואה ניתן לרשום בצורה:

$$\int \frac{2\mathrm{d}y}{y^2 + 2c} = \int \mathrm{d}x.$$

שוב, כיוון ש c הוא מספר שרירותי, אפשר להחליף c ב $2c$ וזכור שרק הסימון שלו משנה. כמו כן, כיוון שרק לסימן יש חשיבות, ניתן לרשום c^2 כאשר הקבוע חיובי ו $-c^2$ כאשר הוא שלילי.

נעבור לפתור את קל המקרים.

$$\int \frac{2\mathrm{d}y}{y^2-c^2} = \int \mathrm{d}x$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{aligned} d+x = \int \mathrm{d}x &= \int \frac{2}{y^2-c^2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{c}\int \frac{1}{y-c} - \frac{1}{y+c}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{c}\ln\left(\frac{y-c}{y+c}\right) \end{aligned}$$

הפתרון הופך ל $x - \frac{1}{c}\ln\left(\frac{y-c}{y+c}\right) + d = 0$. נפתור את המקרה:

$$\int \frac{2\mathrm{d}y}{y^2} = \int \mathrm{d}x$$

והפתרון נתון על ידי $-\frac{2}{y} = x + c$.

נפתור את המקרה השלילי

$$\int \frac{2\mathrm{d}y}{y^2+c^2} = \int dx = x + d$$

נעשה הצבה $y = cu$, $\mathrm{d}u = c\mathrm{d}t$ ונקציב במשוואה. נקבל:

$$\int \frac{2\mathrm{d}y}{y^2+c^2} = \int \frac{2c\mathrm{d}u}{c^2u^2+c^2} = \frac{2}{c}\arctan u = \frac{2}{c}\arctan\frac{y}{c}.$$

נשווה עם הצד השני ונקל:

$$\frac{2}{c}\arctan\frac{y}{c} = x + d.$$

לסיכום: הפתרונות הם: הם $y = -\frac{2}{x+c}$ או $\frac{2}{c}\arctan\frac{y}{c} - x - d = 0$ או $\frac{1}{c}\ln\frac{y-c}{y+c} - x - d = 0$.

2. $y^2y'' - 2\left(y'\right)^3 = 0$.

פתרון. שוב, נשתמש באותה ההצבה כמו קודם:

$$y' = p, y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$y^2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p - 2p^3 = 0.$$

קיבלנו משוואה פרידה. נעשה העברות אגפים ונקבל:

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{p^2} = 2\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2}$$

ונקבל: $-\frac{1}{p} = -\frac{2}{y} + c$ או באופן שקול (אחרי שמחליפים c ב־$-c$).

$$p = \frac{y}{2+cy}.$$

נציב $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ונקבל:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{2+cy}$$

זאת משוואה פרידה שהופכת אחרי מעבר אגפים וביצוע אינטגרציה ל

$$\int \frac{2+cy}{y}\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x .$$

הפתרון נתון על ידי

$$x + d = 2\ln y + cy.$$

3. $(y'')^2 + (y')^2 = 1$

פתרון. המשוואה הנתונה היא:

$(y'')^2 + (y')^2 = 1$. נבצע הבצה: $p = y'$, $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p$. המשוואה הופכת ל

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p\right)^2 + p^2 = 1 .$$

נחלק למקרים: אם, $p^2 = 1$, אזי $p = \pm 1$, והמשוואה הופכת ל $p = y' = \pm 1$, עם הפתרון הכללי $y = \pm x + C$. אחרת המשוואה הופכת ל

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p = \pm\sqrt{1-p^2}.$$

נפתור כל מקרה בנפרד:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p = \sqrt{1-p^2}$$

$$\int \frac{p\mathrm{d}p}{\sqrt{1-p^2}} = \int \mathrm{d}y$$

נקבל:

$$-\sqrt{1-p^2} = y + c$$

נציב ונקבל:

$$-\sqrt{1-(y')^2} = y + c$$

נעלה בריבוע ונקבל: הצבה $u = y + c$ הופכת הת המשוואה לא

$$. -\sqrt{1-u^2} = \frac{du}{dx}$$

$$-\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = dx$$

נבצע אינטגרציה על שני האגפים ונקבל ונקבל:

$$\arccos u = x + d$$

$$y + c = u = \arccos(x + d)$$

והפתרון הוא הוא

$$.y = \cos(x + d) + c$$

המקרה עם סימן שלילי זהה לגמרי, חוץ מזה שמקבלים שפתרון של האינגרל הוא עם סינוס במקום קוסינוס. מאילוצי החלפת סימן, מקבלים גם

$$.y = \sin(x + d) + c$$

לסיכום, הפתרון הכללי הוא:

$$\sin(x + d) + c$$

או

$$\cos(x + d) + c$$

או

$$.y = x + c$$

4. $.y'' - \left(2x + \frac{1}{x}\right) y' = 0$

פתרון. מכיוון y לא מופיע במשווה, נוכל להציב $u = y'$ ולקבל משוואה מסדר ראשון. נציב ונקבל:

$$u' - \left(2x + \frac{1}{x}\right) u = 0$$

נמצא גורם אינטגרציה:

$$F(x) = e^{-\int 2x - \frac{1}{x} \mathrm{d}x} = e^{-x^2 - \ln x}$$

המשוואה הופכת ל

$$\left(e^{-x^2} \frac{1}{x} u\right)' = 0$$

והפתרון שלה הוא

$$.u = cxe^{x^2}$$

נציב $y' = u$ נפתור ונקבל

$$y = \int cxe^{x^2} = \frac{c}{2} e^{x^2} + d$$

נחליף $\frac{c}{2}$ ב c ונרשום את הפתרון הסופי על ידי $y = ce^{x^2} + d$.

5. $xy'' - 4y' = 3x^2$.

פתרון. כמו קודם, נציב $u = y'$. נציב וחלק את שני האגפים של המשוואה ב x.

$$u' - \frac{4}{x} u = 3x$$

נחפש גורם אינטגרציה על ידי

$$.F(x) = e^{-\int \frac{4}{x} \mathrm{d}x} = e^{-4 \ln x} = \frac{1}{x^4}$$

נכפיל את שני האגפים של המשוואה בגורם אינטגרציה שמצאנו, $\frac{1}{x^4}$ ונקבל

$$.\frac{1}{x^4} u' - \frac{4}{x^5} u = \left(\frac{1}{x^4} u \right)' = \frac{3}{x^3}$$

נעשה אינטגרציה על שני האגפים ונקבל:

$$.u = x^4 \left(\int \frac{3}{x^3} \mathrm{d}x \right) = -\frac{3}{2} x^2 + C_1 x^4$$

נציב

$$u = y' = -\frac{3}{2} x^2 + C_1 x^4$$

נעשה אינגרציה על שניה האגפים ונקבל

$$.y = -\frac{1}{2} x^3 + C_1 \frac{x^5}{5} + C_2$$

תרגיל 2. מצאו פתרון פרטו למשוואות הבאות עם תנאי התחלה הבאים:

1. $(1-x) y'' + 2(1-x) y' = 0$, כאשר $y(0) = 2, y'(0) = 2$.

פתרון. נבצע שוב החלפת משתנים $u = y'$ בגלל ש y לא מופיע במשוואה. נקבל:

$$.(1-x) u' + 2(1-x) u = 0$$

נחלק את שני האגפים ב $(1-x)$ ונקבל: $u' = -2u$ והפתרון של המשוואה הוא

$$\ln u = -2x + c$$

ו $y' = u = ce^{-2x}$. נעשה אינגרל

$$.y = -\frac{c}{2}e^{-x} + d = C_1 e^{-2x} + C_2$$

נציב $x = 0$ בנגזרת ובביטוי ונקבל:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 2 \\ \frac{-C_1}{2} &= 2 \end{aligned}$$

ונקבל: $C_1 = -4$, $C_2 = 6$.

2. $\cos(x)\, y'' + \sin(x)\, y' = 1$, עם תנאי התחלה $y(0) = 2, y(\pi) = 0$.

פתרון. כמו קודם, נשתמש בהצבה $u = y'$. נחלק ב $\cos x$ את שני אגפי המשוואה ונקבל:

$$.u' + \frac{\sin x}{\cos x} u = \frac{1}{\cos x}$$

נחשב גורם אינטגרציה:

$$.F(x) = e^{\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x} = e^{-\ln\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

נכפיל את שני האגפים בגורם אינגרציה ונקבל:

$$.\left(\frac{1}{\cos x} u\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

נבצע אינגרציה לשני ההאגפים ונקבל:

$$\frac{u}{\cos x} = \tan x + c$$

ולכן

$$.y' = \sin x + c\cos x$$

נעשה אינגרציה על שני ההאגפים ונקבל:

$$.y = -\cos x + c\sin x + d$$

נציב $x = 0$ ונקבל

$$\begin{aligned} -\cos 0 + d &= y(0) = 2 \\ -\cos\pi + d &= y(\pi) = 0 \end{aligned}$$

קיבלנו $d = 1$ ומצד שני c יכול להיות כל דבר. למשוואה יש אינסוף פתרונות והפתרון הכללי הוא מהצורה:

.y=$-\cos x + c\sin x$1+

תרגיל 3. מצאו, עבור כל אחת מהמשוואות הבאות, בעזרת פתרון נתון y_1, פתרון נוסף y_2 והראו שהפתרון הכללי של המשוואה הוא מהצורה $c_1y_1+c_2y_2$ על ידי חישוב הורונסקיאן.

1. $y_1=(1-x)^3$ עבור המשוואה

$$(1-x)^2y''+(1-x)\,y'-3y=0.$$

פתרון. נחפש פתרון מהצורה $y_2=uy_1=u\,(1-x)^3$. נציב במשוואה ונקבל:

$$\begin{aligned}0=(1-x)^2\left(u\,(1-x)^3\right)''+(1-x)\left(u\,(1-x)^3\right)'-3\,(1-x)^3&=\\(1-x)^2\left(u''\,(1-x)^3-6u'\,(1-x)^2+6u\,(1-x)\right)&+\\(1-x)\left(u'\,(1-x)^3-3\,(1-x)^2\,u\right)-3\,(1-x)^3&=\\(1-x)^2\left(u''\,(1-x)^3-6\,(1-x)^2\,u'\right)+(1-x)\,(1-x)^3\,u'&=0\end{aligned}$$

נחלק את המשוואה ב $(1-x)^4$ ונקבל

$$(1-x)\,u''-5u'=0\,.$$

נוריד את סדר המשוואה על ידי החלפת מתשנים $v=u'$. נקחל ב $(1-x)$ ונקבל:

$$v'-\frac{5}{(1-x)}v=0.$$

נמצא גורם אינגרציה על ידי חישוב:

$$e^{\int-\frac{5}{(1-x)}\mathrm{d}x}=e^{5\ln(1-x)}=(1-x)^5.$$

נכפיל את שניא האגפים בגורם אינגרציה שמצאנו ונקבל:

$$(1-x)^5\,v'-5\,(1-x)\,v=\left((1-x)^5\,v\right)'=0\,.$$

לאחר אינגרציה על שני אגפים נקבל:

$$(1-x)^5\,v=c\,.$$

נחלק ב $(1-x)^2$ ונציב $v=u'$ ונקבל:

$$u'=\frac{c}{(1-x)^5}\Rightarrow u=-\frac{c}{(1-x)^4}+d$$

נבחר $c=-1$, $d=0$, ונקבל $u=\frac{1}{(1-x)^4}$. נכפיל בפתרון שהיה נתון ונקבל ונבדוק ש $y_2=y_1u=\frac{(1-x)^3}{(1-x)^4}=\frac{1}{(1-x)}$. ואכן, מתקיים:

$$\begin{aligned}(1-x)^2\left(\frac{1}{(1-x)}\right)''+(1-x)\left(\frac{1}{(1-x)}\right)'-3\frac{1}{(1-x)}&=\\\frac{2}{(1-x)}+\frac{1}{(1-x)}-3\frac{1}{(1-x)}&=0\end{aligned}$$

נבדוק שהוורונסקיאן לא מתאפס בכל נקודה שאפשר להביא את המשוואה שלנו לצורה נורמלית, ז"א ש $(1-x)\neq 0$.

נחשב את הורונסיאן ונקבל:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1-x)^3 & 3(1-x)^2 \\ \frac{1}{(1-x)} & \frac{1}{(1-x)^2} \end{vmatrix} = -2(1-x)\neq 0$$

כי $(1-x)\neq 0$ (אחרת המשוואה המקורית היא לא משוואה מסדר שני). ולכן, הפתרון הכללי הוא מהצורה:

$$.c_1(1-x)^3+\frac{c_2}{(1-x)}$$

2. $y_1=x^2$ עבור המשוואה:

$$.x^2y''-2xy'+2y=0$$

פתרון. שוב, נחפש פתרון מהצורה $y_2=uy_1$. שוב, אם y הוא פתרון של המשוואה הנ"ל, אם נציב uy במשוואה ונשווה לאפס:

$$\begin{aligned} x^2(uy)''-2x(uy)'+2y &= \\ x^2(u''y+2u'y'+uy'')-2x(u'y+uy')+2y &= \\ x^2(u''y+2u'y')-2x(u'y) &= 0 \end{aligned}$$

נציב $y=y_1=x^2$ ונקבל:

$$x^2\left(u''x^2+4u'x\right)-2x\left(u'x^2\right)=0$$

נחקל את שני האגפים של המשוואה ב x^3 ונקבל:

$$.xu''+2u'=0$$

שוב, נמצא גורם אינרציה $F(x)=e^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}=e^{2\ln x}=x^2$. ונקלב

$$\left(x^2u'\right)'=0$$

ולאחר אינטגרציה נקבל:

$$.u'=\frac{c}{x^2}$$

נבצע אינגרציה שוב ונקבל: $u=-\frac{c}{x}+d$. נבחר $c=-1,d=0$ ונקבל $u=\frac{1}{x}$. נכפיל בפתרון y_1 ונקבל:

$$.y_2=\frac{y_1}{x}=x$$

נציב במשוואה המקורית:

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$

את $y = x$ ונראה שהמשוואה אכן מתאפס. נעבור לבדוק שהורונסקיאן לא מתאפס באף נקודה שבה הצורנה הנורמלית של המשוואה $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$,

$$y'' - \frac{2}{x}y + \frac{2}{x^2}y = 0$$

מוגדרת, כלמר $x \neq 0$. הרונסקיאן הוא

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x \\ x & 1 \end{vmatrix} = -x^2 \neq 0$$

כי $x \neq 0$. לכן, הפתרון הכללי של השמוואה שלנו הוא $c_1x^2 + c_2x$.

תרגיל 4. ידוע ש, xe^x הוא פתרון של השמוואה ההומוגנית:

$$xy'' - xy' - y = 0.$$

מצאו פתרון פרטי למשוואה הנתונה המקיים: $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.
האינגרל בפתרון יוצא קשה מדיי, מעבר לחומר הנלמד.

תרגיל 5. עבור כל זוג של פונקציות, חשבו את הורונסקיאן שלהן ומצאו את הנקודות בהן הוא מתאפס, במידה ויש כאלה.

1. $y_1 = x, y_2 = x^2$. - חישבנו ב שאלה 3 סעיף 2.
2. $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 + \sin^2 x = 1.$$

3. $y_1 = 1 + x, y_2 = \sin x$.

פתרון.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x & 1 \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = (1+x)\cos x - \sin x.$$

נשווה ל 0 וקבל:

$$1 + x = \tan x$$

את המשוואה קשה לפתור באופן אנליטי ונשאר להשאיר את הפתרון איכשהו.

תרגיל 6. מצאו פתרון כללי של כל אחת מהמשוואות הבאות:

1. $y'' - 4y' - 5 = 0$.

פתרון. הפתרון של המשוואה האופיינות הוא $x=5,-1$ ולכן הפתררון הכללי הוא

$$.c_1e^{5x}+c_2e^{-x}$$

2. $.y''+9y'+25=0$

פתרון. הפתרון של המשוואה האופיינית $x^2+9x+25=0$ הוא

$$.x_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{81-100}}{2}=-4.5\pm\frac{3}{2}i$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$.c_1e^{-4.5x}\cos\frac{3}{2}x+c_2e^{-4.5}\sin\frac{3}{2}x$$

3. $.y''-16y=0$

פתרון. הפתרון של המשוואה האופיינית הוא $x=\pm4$ ולכן הפתרון הכללי הוא $c_1e^{4x}+$ $.c_2e^{-4x}$

4. $.y''-y'-2y=x^2$

פתרון. תחילה, נפתור את המשוואה ההומוגגנית. התפרון של השמוואה האופיינית

$$x^2-x-2=0$$

הוא $x=2,x=-1$. ולכן אפלתרון הכללה הוא $.c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$ נמצא פתרון פרטי. כיוון שבצד ימין יש רק חזקות של x נחפש פתרון מהצורה: $.ax^2+bx+c$ (לא מכפילים ב x כי הרבוי של 0) הוא 0. נגזור ונשווה את ל 0 ונקבל:

$$2a-(2ax+b)-2\left(ax^2+bx+c\right)=0$$

נקבל: $-2a=1$ ולכן $.a=-\frac{1}{2}$ $-2a-2b=0$ ולכן $.b=-a=\frac{1}{2}$ $2a-b-2c=0$ ולכן $3a=-2c$ ולכן $.c=\frac{3}{4}$ התרון הכללי הוא

$$.-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}+c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$$

5. $.y''-8y'=\cos x$

פתרון. השורשים של הפולינום האופייני הם $.x=0,8$ ולכן הפתרון הכללי של המשוואה האומוגינית הוא $.c_1e^{8x}+c_2$ נמצא פתרון למשוואה הלא הומוגינת על ידי ניחוש $y=a\cos x+b\sin x$, מכיוון ש $\pm i$ הוא לא שורש של המשוואה. נגזור ונשווה ל 0 ונקבל:

$$\begin{aligned}y''-8y'&=(-a\cos x-b\sin x)-8\left(-a\sin x+b\cos x\right)=\\&=-a\cos x-8b\cos x-b\sin x+8a\sin x=\cos x\end{aligned}$$

נשווה מקדמים ונקבל:

$$\begin{aligned}8a-b&=0\\ -a-8b&=1\end{aligned}$$

קיבלנו: $a=8b$, $-65a=1$. $a=-\frac{1}{65}, b=-\frac{8}{65}$. נציב ונקבל את הפתרון הכללי:

$$y=c_1e^{8x}+c_2-\frac{1}{65}\cos x-\frac{8}{65}\sin x$$

.6 $y''+6y'+13y=e^{2x}\cos 3x$. התפרון של השמוואה הואפיינית הוא

$$x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-52}}{2}=-3\pm 2i$$

ולכן הפתרון הכללי של ההומוגינת הוא $c_1e^{3x}\cos 2x+c_2e^{3x}\sin 2x$. שוב, הם אינם שורשים של הפולינום האופייני, ולכן ננחש פתרון מהצורה $e^{2x}\left(a\cos 3x+b\sin 3x\right)$.
נגזור ונקבל:

$$\begin{aligned}y'&=2e^{2x}\left(a\cos 3x+b\sin 3x\right)+e^{2x}\left(-3a\sin 3x+3b\cos 3x\right)\\ &=e^{2x}\left((2a+3b)\cos 3x+(2b-3a)\sin 3x\right)\\ y''&=2e^{2x}\left((2a+3b)\cos 3x+(2b-3a)\sin 3x\right)\\ &+3e^{2x}\left((2b-3a)\cos 3x-(2a+3b)\sin 3x\right)\\ &=e^{2x}\left((12b-5a)\cos 3x-(12a+5b)\sin 3x\right)\end{aligned}$$

נציב במשוואה המוקרית ונשווה מקדמים:

$$\begin{aligned}y''+6y'+13&=\\ e^{2x}\left((12b-5a)\cos 3x-(12a+5b)\sin 3x\right)+&\\ 6e^{2x}\left((2a+3b)\cos 3x+(2b-3a)\sin 3x\right)+13e^{2x}\left(a\cos 3x+b\sin 3x\right)&=\\ e^{2x}\left((20a+30b)\cos 3x+(20b-30a)\right)&=e^{2x}\cos 3x\end{aligned}$$

נשווה את המקדמים ונקבל:

$$\begin{aligned}20b-30a&=0\\ 20a+30b&=1\end{aligned}$$

נקבל: $b=\frac{3}{2}a$, $20a+30b=65a=1$ ולכן $a=\frac{1}{65}$. $b=\frac{3}{130}$. נציב ונקבל בפתרון הכללי ונקבל:

$$.y=\frac{1}{65}\cos 3x+\frac{3}{130}\sin 3x+c_1e^{3x}\cos 2x+c_2e^{3x}\sin 2x$$

תרגיל 7. מצאו פתרון פרטי בהינתן תנאי התחלה הבאים:

1. $y''+4y=e^{2x}$, $y(0)=4$, $y'=0$.

פתרון. נפתור את האופיינית ונקבל:

$$x^2+4x=0$$

הפתרון הוא $x=\pm i$ ולכן הפתרון הכללי הוא $c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$. נחפש פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית מהצורה

$$y=e^{2x}\left(ax^2+bx+c\right).$$

נחשב את הנגזרות.

$$\begin{aligned}
y' &= 2e^{2x}\left(ax^2+bx+c\right)+e^{2x}\left(2ax+b\right)\\
&= 2ae^{2x}x^2+2\left(a+b\right)e^{2x}x+\left(2c+b\right)e^{2x}\\
&= e^{2x}\left(2ax^2+2\left(a+b\right)x+2c+b\right)\\
y'' &= 2e^{2x}\left(2ax^2+2\left(a+b\right)+2c+b\right)\\
&\quad+e^{2x}\left(4ax+\left(a+b\right)\right)\\
&= e^{2x}\left(4ax^2+4\left(2a+b\right)x+\left(a+3b+4c\right)\right)
\end{aligned}$$

נציב במשוואה ונשווה:

$$\begin{aligned}
&y''+4y=\\
&e^{2x}\left(4ax^2+4\left(2a+b\right)x+\left(a+3b+4c\right)\right)+4e^{2x}\left(ax^2+bx+c\right)=e^{2x}
\end{aligned}$$

נשווה מקדמים ונקבל:

$$\begin{aligned}
8a&=1.\\
8a+4b+4b&=0\\
a+3b+4c+4c&=0
\end{aligned}$$

נפתור ונקבל:

$$a=\frac{1}{8},b=-\frac{1}{8},c=-\frac{1}{32}$$

נציב בפתרון הפרטי הכללי ונשווה לתנאי ההתחלה:

$$c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\right)e^{2x}=y$$

$$y\left(0\right)=4=c_1-\frac{1}{32}\Rightarrow c_2=4\frac{1}{32}$$

$$y'\left(0\right)=2c_2\cos 2x-\frac{1}{8}$$

ולכן $c_2=-\frac{1}{16}$.

2. $y'' - 6y + 5 = x^2 \cos x$, $y(0) = 1, y(1) = 1$.

פתרון. הפתרון של המשוואה האופיינית הוא $x = 5, 1$ ולכן הפתרון הכללי של ההומוגנית הוא $c_1 e^{5x} + c_2 e^{x}$.

נחפש פתרון פרטי מהצורה

$$y = \left(a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right) \cos x + \left(b_2 x^2 + b_1 x + b_0\right) \sin x$$

נגזור ונקבל:

$$y' = \left(b_2 x^2 + (2a_2 + b_1) x + (b_0 + a_1)\right) \cos x + \left(-a_2 x^2 + (2b_2 - a_1) x - a_0 + b_1\right) \sin x$$
$$y'' = \left(-a_2 x^2 - (4b_2 - a_1) + (2a_2 + 2b_2 - a_0)\right) \cos x + \left(-b_2 x^2 - (4a_2 + b_1) + (2b_1 - 2a_1 - b_0)\right) \sin x$$

נציב במשווה המקורית ונשווה מקמדים. לאחר מכן נציב את תנאי ההתחלה ונשווה ל 0.