הסתברות - הרצאה - 26/3 - 2

הערה - סטיית התקן של מ"מ X (standard deviation) הוא: $SD(X)=\sqrt{V(X)}$

הערה - $cov(X,X)=V(X)$

טענה - לכל X,Y $\quad |\rho(X,Y)|\leq 1$

הוכחה - נסמן: $t=\frac{cov(X,Y)}{V(Y)}$

$$V(X)(1-\rho(X,Y)^2)=\frac{V(X)\cdot V(Y)-cov(X,Y)^2}{V(Y)}=cov(X,X)-2t\,cov(X,Y)$$

$$+t^2cov(Y,Y)=cov(X-tY,X-tY)=V(X-tY)\geq 0$$

$$\Rightarrow 1-\rho(X,Y)^2\geq 0\Rightarrow \rho(X,Y)^2\leq 1$$

טענה - cov ליניארי — במקום השני:

1) $cov(X,Y+Z)=cov(X,Y)+cov(X,Z)$

2) $cov(X,\alpha Y)=\alpha\, cov(X,Y)$

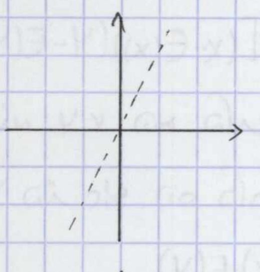
הוכחה - 1) $cov(X,Y+Z)=E[(X-E(X))(Y+Z-E(Y+Z))]=$

$=E[(X-E(X))(Y+Z-E(Y)-E(Z))]=$

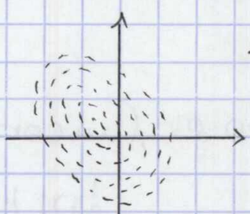
$=E[(X-E(X))(Y-E(Y))+\dots]=cov(X,Y)+\dots$

מסקנה, ה-cov הוא תבנית בילינארית סימטרית.

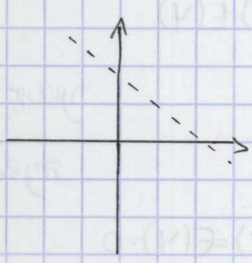
$\rho(X,Y)=1$



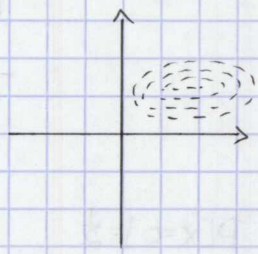
$\rho=-0.5$



$\rho(X,Y)=-1$

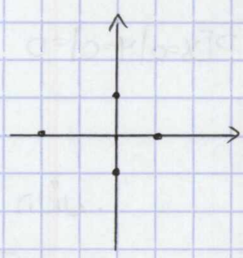


$\rho=0$



$\rho=0.8$

$\rho=0$



הערה - $V(X+Y)=V(X)+2cov(X,Y)+V(Y)$ ← תרגיל

בפרט, $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ אמ"מ X ו-Y בלתי מתואמים.

הסתברות הרצאה - 27/3 - 1

מרחב הסתברות - (Ω, P) , $|\Omega| \le \aleph_0$

P אי שלילית, $P:\Omega\to\mathbb{R}$ פונקציה

$$\sum_\omega P(\omega)=1$$

מאורע $A\subseteq\Omega$

$P(A)=\sum_{x\in A}P(x)$ מאיברים למאורע

דוגמא - N סוגי קלפים.

הנחה: בכל קניה של קלף מקבלים קלף מסוג כלשהו בהסתברות שווה, ובאופן ב"ת בקניות הקודמות.

← כמה קלפים "צריך" לקנות כדי לקבל סט מלא?

← נסמן ב-T את הזמן בו השגנו סט מלא.

← רוצה לדעת $P(T=n)$

← נחשב את $P(T>n)$

פתרון - נסמן - לא קיבלנו קלף מסוג i = A_i ב-n צעדים.

אין תלות בין הצעדים. $P(A_i)=\left(\frac{N-1}{N}\right)^n$ - בכל צעד יש לנו בודד הסיכוי לקבל קלף שאינו מסוג i הוא: $\frac{N-1}{N}$.

* מאי תלות הסיכוי לא לקבל i, n פעמים הוא: $\left(\frac{N-1}{N}\right)^n$

← n צעדים, $P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_k)=\left(\frac{N-k}{N}\right)^n$

$$P(T>n)=P\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right)=\sum_{k=1}^N(-1)^{k+1}\sum_{1\le j_1<j_2<\dots<j_k\le N}P(A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap\dots\cap A_{j_k})$$ הכלה והדחה

$$=\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}\sum_{1\le j_1<j_2<\dots<j_k\le N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^n=\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}\binom{N}{k}\left(\frac{N-k}{N}\right)^n$$

$$P(T=n)=P(T>n-1)-P(T>n)\to P(T>n-1)=P(T=n)+P(T>n)$$

שאלה - כמה סוגי קלפים יהיו אחרי שקנה n קלפים?

מה הסיכוי שיש D סוגי קלפים שונים?

תשובה - נסמן ב-D_n את מס' סוגי הקלפים השונים שיש לנו אחרי n צעדים. $P(D_n=k)$

נבחר k סוגים ספציפיים $(1,\dots,k)$

נגדיר: כל הקלפים מסוגים $1,\dots,k$:A לפחות - אין קלף מ $k+1,\dots,N$

(לא בהכרח) יש קלף מכל סוג מ $1,\dots,k$:B - יש מ1
לא מסתכלים לאחרים.
יש מ2
⋮
יש מk

הסתברות — הרצאה - 27/3 - 2

← $P($אחרי n צעדים יש לי קלפים מהסוגים $1,\dots,k$$) = P(A,B) = P(A)\cdot P(B|A)$

תזכורת- הסתברות מותנה = $P(x|A)$

A - מאורע, $P(A)>0$

$$P(x|A)=\begin{cases}\frac{P(x)}{P(A)}, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

$$P(B|A)=\sum_{x\in B}P(x|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

יש 100 סוגי קלפים, קנינו 30

לא קיבלנו מסוגים 6-100 - A

קיבלנו לפחות אחד מסוג 1 - B

2 -"-

5 -"-

$$P(A)=\left(\frac{k}{N}\right)^n$$

$$P(B|A)=1-\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\binom{k}{i}\left(\frac{k-i}{k}\right)^n$$

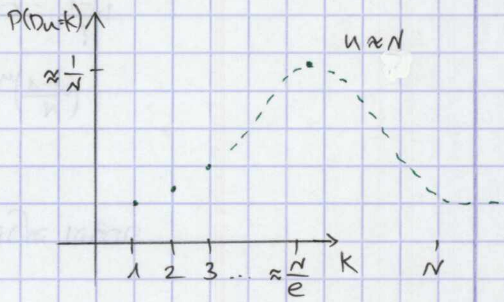
← הסיכוי שאחרי n צעדים יש לנו את הסוגים $1,\dots,k$ הוא:

$$\left(\frac{k}{N}\right)^n\cdot\left(1-\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k+1}\binom{k}{i}\left(\frac{k-i}{k}\right)^n\right)$$

$$P(D_n=k)=\binom{N}{k}\left(\frac{k}{N}\right)^n\left(-\text{"}-\right) \leftarrow$$

$$P\left(\substack{\text{יש את הסוגים}\\ \{1,\dots k\}}\right)+P\left(\substack{\text{יש את הסוגים}\\ \{2,\dots k+1\}}\right)+\dots+$$

← איך להציג לגרף את — $P(D_n=k)$



← מה התוחלת?

$$E(D_n)=\sum_{k=1}^{N}P(D_n=k)\cdot k=\sum_{k=1}^{n}\binom{N}{k}\left(\frac{k}{N}\right)^n\left(1-\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\binom{k}{i}\left(\frac{k-i}{k}\right)^n\right)\cdot k$$

הסתברות - הרצאה - 23/4 - 1

טענה - $N\sim Pois(\lambda)$, $P(N=k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$

$X\sim Bin(N,P)$, $P(X=k)=\binom{N}{k}P^k(1-P)^{N-k}$

$Y=N-X$

אז X,Y ב"ת ומפולגים פואסונית עם פרמטרים: $X\sim Pois(\lambda P)$, $Y\sim Pois(\lambda(1-P))$.

הוכחה - (ש-X מפולג פואסונית).

$$P(X=k)=\sum_{n=k}^{\infty}P(N=n)\cdot P(X=k\mid N=n)=$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}P^k\cdot(1-P)^{n-k}=e^{-\lambda}\frac{1}{k!}\cdot P^k\sum_{n=k}^{\infty}\lambda^n\cdot\frac{1}{n!}\cdot\frac{n!}{(n-k)!}\cdot(1-P)^{n-k}=$$

$$=e^{-\lambda}\frac{P^k}{k!}\lambda^k\sum_{n=k}^{\infty}\lambda^{n-k}\frac{(1-P)^{n-k}}{(n-k)!}=m=n-k=e^{-\lambda}\frac{P^k}{k!}\lambda^k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-P))^m}{m!}=$$

$$\Rightarrow e^z=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\Rightarrow e^{-\lambda}\cdot\frac{(P\lambda)^k}{k!}\cdot e^{\lambda(1-P)}=e^{\lambda(-1+1-P)}\cdot\frac{(P\lambda)^k}{k!}=e^{-\lambda P}\frac{(\lambda P)^k}{k!}$$

$=P(Z=k)\rightarrow Z\sim Pois(\lambda P)$ אם

36.4 התפלגות גאומטרית (Geometric Distribution)

הגדרה - אומרים ש-X מפולג גאומטרית עם פרמטר P ומסמנים $X\sim G(P)$ אם

$$P(X=k)=P(1-P)^{k-1}=P\cdot q^{k-1}$$

← X סופר את מס' הניסויים עד ההצלחה הראשונה.

← זו התפלגות כי $\sum_{k=1}^{\infty}P(1-P)^{k-1}=P\cdot\frac{1}{1-(1-P)}=1$

תוחלת - $h(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

נגזור - $h'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot P(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot P\cdot(1-P)^{k-1}=P\sum_{k=0}^{\infty}k(1-P)^{k-1}=P\left(\frac{1}{1-q}\right)^2=\frac{1}{P}$$

שונות - $h''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{k=0}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$

$$E(X(X-1))=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)P(1-P)^{k-2}=P(1-P)\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)(1-P)^{k-2}$$

$$=P(1-P)\frac{2}{(1-q)^3}=\frac{2(1-P)}{P^2}=\frac{2q}{P^2}$$

הסתברות - הרצאה - 23/4 - 2

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=E(X(X-1))+E(X)-(E(X))^2$$

$$=\frac{2q}{p^2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}=\frac{2q+p-1}{p^2}=\frac{2q-q}{p^2}=\frac{q}{p^2}$$

טענה - "חוסר הזכרון" של התפלגות גיאומטרית

נניח $X\sim G(p)$. אזי לכל n טבעי, $X>n$ ל/כ $X-n\sim G(p)$

$$P(X-n=k\mid X>n)=\frac{P(X=n+k)}{P(X>n)}=\frac{p(1-p)^{n+k-1}}{\sum_{m=1}^{\infty}p(1-p)^{n+m-1}}=$$

$$=\frac{p(1-p)^{n+k-1}}{q^n\underbrace{\sum_{m=1}^{\infty}p(1-p)^{m-1}}_{=1}}=p\cdot q^{k-1}=p(1-p)^{k-1}$$

טענה - X מ"מ בעל המקבל ערכים שלמים וחיוביים

$$E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}P(X\geq n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(X\geq n)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}kP(X=k)=E(X)$$

דוגמא - אני מציע למכור כרטיס להגרלה. מחיר הכרטיס 100 ש"ח.
אתה מקבלים 2 ש"ח כאשר X מתפלג $G(\frac{1}{2})$ ← התוחלת ∞
← האם כדאי?

3.6.5 התפלגות בינומית שלילית - Negative binomial distribution

הגדרה - X מתפלג בינומי שלילי (עם הפרמטרים r,p),
מסומן - $X\sim NB(r,p)$ - אם $P(X=k)=\binom{k+r-1}{k}(1-p)^r p^k$.

← X סופר את מס' ההצלחות בסדרת ניסוי ברנולי עם הס' הצלחה p
עד הכשלון ה-r

← $NB(1,p)=G(q)-1$

הסתברות הרצאה - שבוע - 1

הערה - יש (מעט) שמגדירים התפלגות גיאומטרית — כמס' הכשלונות בסדרת ניסויי ברנולי עם הסת' הצלחה p עד ההצלחה הראשונה.

תזכורת - אמרנו ש-X מתפלג בינומי שלילי עם פרמטרים r,p אם: $p(X=k)=\binom{k+r-1}{k}q^r p^k$

ואמרנו ש-X סופר את — מס' ההצלחות עד הכשלון ה-r (בסדרת ניסויי ברנולי עם סיכוי הצלחה p).

הערה - אין הסכמה על הגדרת התפלגות זו. סופרים ניסויים/הצלחות — עד הכשלון/הצלחה ה-r. ראינו: $NB(1,p)=G(q)-1$.

הערה - באופן כללי יותר נסמן ב-Y_i את מס' ההצלחות — מהכשלון ה $i-1$ עד הכשלון ה-i. נשים לב ש-$Y_i-1\sim G(q)$.

← כעת אם $X\sim NB(r,p)$ אז $X=Y_1+Y_2+\dots+Y_r$ ולכן $E(X)=\sum E(Y_i)$

$$=r\left(\frac{1}{q}-1\right)=r\frac{p}{q}$$

השונות — של X: ה-Y_i ב"ת ולכן $V(X)=\sum_{i=1}^{r}V(Y_i)=r\cdot\frac{p}{q^2}$.

כמה סדרות — של 0 (כשלון) ו-1 (הצלחה) עם r אפסים, k אחדות — כשהאיבר האחרון הוא אפס יש? $q^r\cdot p^k\cdot\binom{k+r-1}{k}$

הסיכוי לראות — סדרה נתונה כזו.

← הביטוי ל-$P(X=k)$ מעריך את — ההסת' ל-k הצלחות — עד הכשלון ה-r.

הבינום של ניוטון: $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$

הגדרה - לכל $r\in\mathbb{C}$ ו-$k\in\mathbb{N}$ נגדיר $\binom{r}{k}=\frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)}{k!}$

ניוטון הראה - $(x+y)^r=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}x^{r-k}y^k$

כאשר $r\in\mathbb{C}$, $x,y\in\mathbb{R}$ ו-$|x|>|y|$

מקרה פרטי - $s\in\mathbb{N}$, $r=-s$

$$\binom{-s}{k}=\frac{-s(-s-1)(-s-2)\cdots(-s(k-1))}{k!}=$$

$$=\frac{(-1)^k(s+(k-1))(s+(k-2))\cdots(s+2)(s+1)s}{k!}=$$

$$=(-1)^k=\frac{(s+k-1)!}{(s-1)!\,k!}=(-1)^k\binom{s+k-1}{s-1}$$

כעת - $(1-x)^{-s}=\frac{1}{(1-x)^s}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{s+k-1}{s-1}(-1)^k(-x)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{s+k-1}{s-1}x^k$

הסתברות — הרצאה - שבוע - 2

$$P(X=k)=\binom{r+k-1}{r-1}q^r p^k \Leftarrow X\sim NB(r,p)$$

תקף - $$q^r\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r+k-1}{r-1}p^k=q^r\left(\frac{1}{q}\right)^r=1$$

← לקרוא על התפלגות היפר גאומטרי בחוברת של פרופ' וישנה!

4. חסמים (Bounds)

4.1 אי שוויון מרקוב (Markov's Inegvality)

טענה - יהא X מ"מ אי שלילי עם תוחלת μ. אז $P(X\geq a\mu)\leq 1/a$

הערה - נגדיר עבור $a\in\mathbb{R}$, $a\geq 1$, $P(X=0)=1-1/a$

אז - $E(X)=1$, $P(X=a)=1/a$, $P(X\geq a)=\frac{1}{a}$.

מסקנה - אי שוויון מרקוב הדוק (עד הדוגמא היחידה).

הערה - אם X מ"מ אי שלילי עם תוחלת סופית אז - $P(X\geq 1)\leq E(X)$

מהצבה $a=\frac{1}{E(X)}$

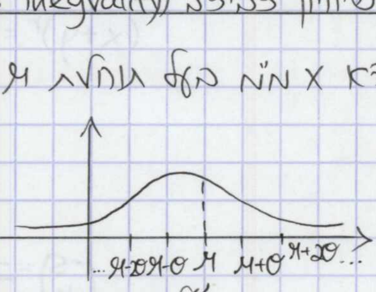
הוכחה -
$$E(X)=\sum_b P(X=b)\cdot b=$$
$$=\underbrace{\sum_{b<a}P(X=b)\cdot b}_{\geq 0}+\sum_{b\geq a}P(X=b)\cdot b\geq$$
$$\geq\sum_{b\geq a}P(X=b)\cdot b\geq a\cdot\sum_{b\geq a}P(X=b)=a\cdot P(X\geq a)$$

$$\Leftarrow\quad P(X\geq a)\leq\frac{E(X)}{a}\quad\blacksquare$$

4.2 אי שוויון צ'ביצ'ב (Chebyshev's Inegvality)

טענה - יהא X מ"מ בעל תוחלת μ ושונות σ^2 אז - $P(|X-\mu|\geq k\sigma)\leq\frac{1}{k^2}$.

הוכחה -



לא בהכרח בשיא.

$$V(X)=E((X-\mu)^2)=\sum_a((a-\mu)^2)P(X=a)=$$
$$=\sum_{a\leq\mu-k\sigma}+\sum_{\mu-k\sigma<a<\mu+k\sigma}+\sum_{a\geq\mu+k\sigma}\geq$$
$$\geq\sum_{|a-\mu|\geq k\sigma}(a-\mu)^2P(X=a)\geq(k\sigma)^2\sum_{|a-\mu|\geq k\sigma}P(X=a)$$
$$=(k\sigma)^2P(|X-\mu|\geq k\sigma)\Rightarrow P(|X-\mu|\geq k\sigma)\leq\frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2}$$

<u>הסתברות – הרצאה - 24/4 - 3</u>

תרגיל- הראו שאי השוויון הדוק.

→ להעתיק מהחוברת של רוני וישנה.

הסתברות - הרצאה - 30/4 - 1

4.3 א"ש קנטלי (Cantelli's inequality)

טענה - X מ"מ עם תוחלת μ ושונות σ^2, אז $P(X-\mu \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2+\sigma^2}$

הוכחה - נגדיר מ"מ חדש - $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$

← נקרא לעיתים "תקנון" $E(Y)=0$ $\left(E(Y)=E\left(\frac{X}{\sigma}-\frac{\mu}{\sigma}\right)=\frac{E(X)}{\sigma}-\frac{\mu}{\sigma}=\frac{\mu}{\sigma}-\frac{\mu}{\sigma}=0 \Leftarrow\right)$

$$V(Y)=V\left(\frac{X}{\sigma}-\frac{\mu}{\sigma}\right)=V\left(\frac{X}{\sigma}\right)=V(X)/\sigma^2=1$$

← לכל $t>-k$ מתקיים: $P(Y\geq k)=P\left(\frac{Y+t}{k+t}\geq 1\right)\leq P\left(\left(\frac{Y+t}{k+t}\right)^2\geq 1\right)$

$V(Y)=E((Y-E(Y))^2)=E(Y^2)$ א"ש מרקוב $\rightarrow \leq E\left(\left(\frac{Y+t}{k+t}\right)^2\right)=E\left(\frac{Y^2+2Yt+t^2}{(k+t)^2}\right)=\sigma^2$

נבחר (אופטימלי) $t=\frac{1}{k}$.

$$P(Y\geq k)\leq \frac{1+\frac{1}{k^2}}{\left(k+\frac{1}{k}\right)^2}=\frac{1+\frac{1}{k^2}}{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)(1+k^2)}=\frac{1}{1+k^2}$$

כעת - $Y\geq k \Leftrightarrow \frac{X-\mu}{\sigma}\geq k \Leftrightarrow X-\mu\geq k\sigma \Rightarrow P(X-\mu\geq k\sigma)=$

$$=P(Y\geq k)\leq \frac{1}{1+k^2}$$

$a=k\sigma \Leftarrow$ $P(X-\mu\geq a)\leq \frac{1}{1+\left(\frac{a}{\sigma}\right)^2}=\frac{\sigma^2}{a^2+\sigma^2}$

4.4 חסמים עם מומנטים גבוהים (Bounding using higer moments)

טענה - יהי X מ"מ עבורו $E(X^i)$ קיים לכל $1\leq i\leq k$ $(k\geq 2)$ אז:

$$P(|X-E(X)|\geq a)\leq \frac{E(|X-E(X)|^k)}{a^k}$$

4.5 א"ש שיוויון מסוג צ'רנוף (Chernoff type Bounds)

משפט - יהי X_i, $1\leq i\leq n$ מ"מ ב"ת המוגדרים ע"י $P(X_i=1)=P(X_i=-1)=\frac{1}{2}$.

יהא $S_n=X_1+\dots+X_n$ אז לכל $a>0$: $P(S_n>a)<e^{-a^2/2n}$

תזכורת - $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$\cosh(x)\leq e^{x^2/2}$ (ע"י השוואה של מקדמים בפיתוח טיילור).

הוכחה - נקבע a,n ונבחר $\lambda>0$. אז - $E(e^{\lambda X})=\frac{1}{2}e^{\lambda}+\frac{1}{2}e^{-\lambda}$

$$=\cosh(\lambda)$$

הסתברות - הרצאה - 30/4 - 2

$$e^{\lambda S_n}=e^{\lambda\Sigma x_i}=\prod_{i=1}^{n}e^{\lambda x_i}$$

אי תלות

$$E(e^{\lambda S_n})=E\left(\prod_{i=1}^{n}e^{\lambda x_i}\right)=\prod_{i=1}^{n}E(e^{\lambda x_i})=$$

$$=\cosh^n(\lambda)\le e^{\lambda^2 n/2}$$

ולכן - $P(S_n>a)=P(e^{\lambda S_n}>e^{\lambda a})\le E(e^{\lambda S_n})/e^{\lambda a}$

א"ש מרקוב

$$\le e^{\lambda^2 n/2-\lambda a}$$

נבחר (אופטימלי) - $\lambda=\frac{a}{n}$

ואז הסיכוי - $P(S_n>a)\le e^{-a^2/2n}$

מסקנה - $P(|S_n|>a)<2e^{-a^2/2n}$

רעיון מרכזי בא"ש צרנוף ← רוצים לחסום את $P(X>a)$

← לכל λ $P(X>a)=P(e^{\lambda x}>e^{\lambda a})<\frac{E(e^{\lambda x})}{e^{\lambda a}}$

← אופטימיזציה על λ.

הערה - עבור $P(X<a)$ עובדים עם $e^{-\lambda}$

← עבור $E(X)=0$ התוצאות "נקיות" וכו'.

משפט - יהיו $P_1,\dots,P_n\in[0,1]$.

יהיו X_i מ"מ ב"ת המוגדרים: $P(X_i=1-P_i)=P_i$

$$P(X_i=-P_i)=1-P_i$$

נסמן - $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$, $P=\frac{\Sigma P_i}{n}$

1) אז - $P(X>a)<e^{-2a^2/n}$

2) $P(|X|>a)<2e^{-2a^2/n}$

3) $P(X<-a)<e^{-a^2/2pn}$

טענה - לכל α,β כאשר $|\alpha|\le 1$ מתקיים $e^{\beta^2/2+\alpha\beta}\ge\cosh(\beta)+\alpha\sinh(\beta)$

הוכחה - כאשר $\alpha=1$. $\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}+\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}=e^{\beta}\le e^{\beta^2/2+\beta}$

כנ"ל $\alpha=-1$.

כאשר $|\beta|\ge 100$ אז $\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}+\alpha\cdot\left(\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}\right)<e^{\beta^2/2+\alpha\beta}$

נניח את שלילת הטענה -

$$f(\alpha,\beta)=\cosh(\beta)+\alpha\sin(\beta)-e^{\beta^2/2+\alpha\beta}$$

יש מקס' חיובי במלבן - $\{(\alpha,\beta)\,|\,|\alpha|\le 1,|\beta|\le 100\}$

נביט בנגזרות החלקיות -

הסתברות הרצאה - שבוע-3

$$\frac{df}{d\beta} = \sinh(\beta) + \alpha\cosh(\beta) - e^{\beta^2/2 + \alpha\beta}\cdot(\beta+\alpha) \quad \leftarrow$$

$$\frac{df}{d\beta} = \sinh(\beta) - e^{\beta^2/2 + \alpha\beta}\cdot\beta$$

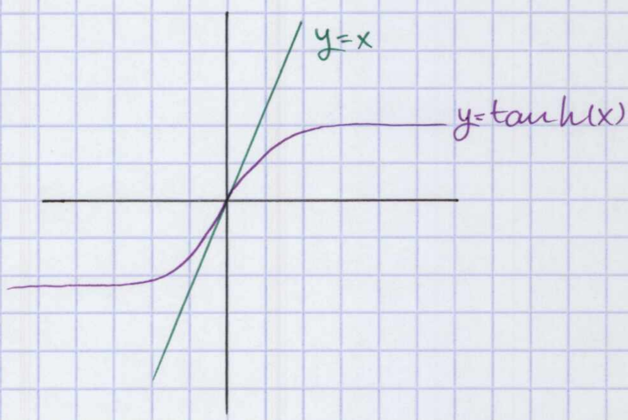
נשווה ל-0:

$$\sinh(\beta) = \alpha\cosh(\beta) = e^{\beta^2/2 + \alpha\beta}(\alpha+\beta)$$

$$\sinh(\beta) = e^{\beta^2/2 + \alpha\beta}\cdot\beta$$

$$\Rightarrow \alpha\cosh(\beta) = e^{\beta^2/2 + \alpha\beta}\cdot\alpha$$

$$\Rightarrow \tanh(\beta) = \frac{\sinh(\beta)}{\cosh(\beta)} = \beta$$



מסקנה - $\beta=0$ (in all local maxima)

אבל - $f(\alpha,0) = \cosh(0) + \alpha\cancel{\sinh}(0) - 1 = 0$

ולכן הטענה נכונה.

הסתברות - הרצאה 15-1

המשך לאתמול - $p_1,\dots,p_n$

$$P(x_1=1-p_i)=p_i$$

$$P(x_i=-p_i)=1-p_i$$

$$X=\sum x_i$$

רוצים להראות - 1. $P(X>a)<e^{-2a^2/n}$, 2. $P(|X|>a)<2e^{-2a^2/n}$, 3. $P(X<-a)<e^{-a^2/2pn}$

ראינו - $\cosh(\beta)+\alpha\sinh(\beta)\le e^{\beta^2/2+\alpha\beta}$

מסקנה - לכל $\theta\in[0,1]$ ולכל λ - $\theta e^{\lambda(1-\theta)}+(1-\theta)e^{-\lambda\theta}\le e^{\lambda^2/8}$

הוכחה - נציב $\theta=\frac{1}{2}(1+\alpha)$, $\lambda=2\beta$

$$\frac{1}{2}(1+\alpha)e^{2\beta(1-\frac{1}{2}(1+\alpha))}+\frac{1}{2}(1-\alpha)e^{-2\beta\frac{1}{2}(1+\alpha)}=$$

$$=\frac{1}{2}e^{\beta-\alpha\beta}+\frac{1}{2}\alpha e^{\beta-\alpha\beta}+\frac{1}{2}e^{-\beta-\beta\alpha}-\frac{1}{2}\alpha e^{-\beta-\beta\alpha}=$$

$$=e^{-\alpha\beta}\left(\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}+\alpha\cdot\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}\right)=e^{-\alpha\beta}(\cosh(\beta)+\alpha\sinh(\beta))\le$$

$$\le e^{-\alpha\beta}\cdot e^{\beta^2/2+\alpha\beta}=e^{\beta^2/2}=e^{\lambda^2/8}$$

לכל $\lambda>0$ - $E(e^{\lambda x_i})=p_i\cdot e^{\lambda(1-p_i)}+(1-p_i)e^{-\lambda p_i}$

לכן - $E(e^{\lambda X})=Ee^{\lambda\sum x_i}=E\prod e^{\lambda x_i}=\prod Ee^{\lambda x_i}\le$
$\le e^{\lambda^2 n/8}$

$\Leftarrow$ $P(X>a)=P(e^{\lambda X}>e^{\lambda a})<\frac{E(e^{\lambda X})}{e^{\lambda a}}\le$
$\le e^{\lambda^2 n/8-\lambda a}$

נבחר $\lambda=\frac{4a}{n}$ ונקבל את המשפט.

משפט - Y סכום של מ"מ מציינים ב"ת. $\mu=E(Y)$

אז לכל $\varepsilon>0$, $P(|Y-\mu|>\varepsilon\mu)<2e^{-c_\varepsilon\cdot\mu}$

כאשר c_ε קבוע (תלוי רק ב-ε).

משפט - יהיו $X_1,\dots,X_n$ מ"מ מציינים ב"ת. $\mu=E(X)$, $X=\sum x_i$

לכל $0<\delta<1$ מתקיים - $P(X\ge(1+\delta)\mu)\le e^{-\delta^2\mu/3}$

$$P(X\le(1-\delta)\mu)\le e^{-\delta^2\mu/2}$$

4.7 הלמה הלוקלית - (Lovaźe Local Lemma)

משפט - יהיו $A_1,\dots,A_n$ מאורעות.

ויהא E יחס התלות ביניהם, כלומר $(i,j)\in E$ אמ"מ A_i,A_j תלויים.

הסתברות הרצאה - 1/5 - 2

← נניח שקיימים $0<x_i<1$ עבור $1\le i\le n$ כך ש- $P(A_i)\le x_i\prod_{(i,j)\in E}(1-x_j)$

אז - $P(\bigwedge_{i=1}^{n}\bar{A}_i)\ge\prod_{j=1}^{n}(1-x_i)$

הוכחה - ראשית, נראה באינדוקציה שלכל $S\subseteq\{1,\dots,n\}$, $|S|=s<n$ ולכל $i\notin S$

מתקיים - $P(A_i|\bigwedge_{j\in S}\bar{A}_j)\le x_i$. (עבור $s=0$ ✓)

נניח שמתקיים לכל $s'<s$ -

נסמן - $S_1=\{j\in S|(i,j)\in E\}$

$S_2=S\setminus S_1$.

$$P(A_i|\bigwedge_{j\in S}\bar{A}_j)=\frac{P(A_i\wedge\bigwedge_{j\in S}\bar{A}_j)}{P(\bigwedge_{j\in S}\bar{A}_j)}=$$

$$=\frac{P(A_i\wedge\bigwedge_{j\in S_1}\bar{A}_j|\bigwedge_{j\in S_2}\bar{A}_j)\cdot\cancel{P(\bigwedge_{j\in S_2}\bar{A}_j)}}{P(\bigwedge_{j\in S_1}\bar{A}_j|\bigwedge_{j\in S_2}\bar{A}_j)\cdot\cancel{P(\bigwedge_{j\in S_2}\bar{A}_j)}}$$

נטפל בנפרד במונה (נחסום מלמעלה) ובמכנה (נחסום מלמטה).

מונה - $P(A_i\wedge\bigwedge_{j\in S_1}\bar{A}_j|\bigwedge_{j\in S_2}\bar{A}_j)\le P(A_i|\bigwedge_{j\in S_2}\bar{A}_j)\overset{\text{אי תלות}}{=}$

$=P(A_i)\le x_i\cdot\prod_{(i,j)\in E}(1-x_j)$

$P(A\wedge B\wedge C)=P(A)\cdot P(B\wedge C|A)$

$=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|B\wedge A)$

מכנה - $P(\bigwedge_{j\in S_1}\bar{A}_j|\bigwedge_{j\in S_2}A_j)=P(\bar{A}_{j_1}\wedge\bar{A}_{j_2}\wedge\dots\wedge\bar{A}_{j_r}|\bigwedge_{j\in S_2}\bar{A}_j)=$

נסמן $S_1=\{j_1,j_2,\dots,j_r\}$ אם $r=0$ אז המכנה שווה 1 וסיימנו.

$=P(\bar{A}_{j_1}|\bigwedge_{j\in S_2}\bar{A}_j)\cdot P(\bar{A}_{j_2}|\bar{A}_{j_1}\wedge\bigwedge_{j\in S_2}A_j)\dots$

$\dots P(\bar{A}_{j_r}|\bar{A}_{j_1}\wedge\bar{A}_{j_2}\wedge\dots\wedge\bar{A}_{j_{r-1}}\wedge\bigwedge_{j\in S_2}A_j)=$

$=(1-P(A_{j_1}|\bigwedge_{j\in S}\bar{A}_j))(1-P(A_{j_2}|A_{j_1}\wedge\bigwedge_{j\in S}\bar{A}_j))\dots$

$\dots P(1-P(A_{j_r}|\bar{A}_{j_1}\wedge\bar{A}_{j_2}\wedge\dots\wedge\bar{A}_{j_{r-1}}\wedge\bigwedge_{j\in S_2}\bar{A}_j)\ge$

$\ge(1-x_{j_1})(1-x_{j_2})\cdot\ldots\cdot(1-x_{j_r})=\prod_{j\in S_1}(1-x_j)\ge\prod_{(i,j)\in E}(1-x_j)$

הסתברות הרצאה - 7/5 - 1

המקובל א-

תזכורת: משפט - (הלמה הלוקאלית) - יהיו $A_1,\ldots,A_n$ מאורעות ויהא E יחס התלות ביניהם (כלומר $i E j$ אמ"מ A_i תלוי ב-A_j).

נניח שקיימים $0\le x_i<1$ כך ש- $P(A_i)\le x_i\prod_{(i,j)\in E}(1-x_j)$, אז- $P(\bigwedge_{i=1}^{n}\bar{A}_i)\ge\prod_{j=1}^{n}(1-x_j)$

ובפרט חיובי.

ראינו (באינדוקציה) שתחת הנחות המשפט מתקיים:

לכל $S\subseteq\{1,2,\ldots n\}$, $|S|<n$ ולכל $i\notin S$ - $P(A_i|\bigwedge_{j\in S}\bar{A}_j)\le x_i$.

נס"ם את ההוכחה - $P(\bigwedge_{i=1}^{n}\bar{A}_i)=P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_3|\bar{A}_1,\bar{A}_2)\cdot\ldots\cdot P(\bar{A}_n|\bigwedge_{j=1}^{n-1}\bar{A}_j)=$

$$=(1-P(A_1))(1-P(A_2|\bar{A}_1))\cdot(1-P(A_3|\bar{A}_1\wedge\bar{A}_2))\cdots(1-P(A_n|\bar{A}_1\wedge\bar{A}_2\wedge\ldots\wedge\bar{A}_{n-1}))\ge\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)$$

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1\wedge A_2)}{P(A_1)}\Rightarrow P(A_1\wedge A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)$$

מסקנה - (הגירסה הסימטרית) - יהיו $A_1,\ldots,A_n$ מאורעות כך שכל מאורע תלוי בלכל היותר d מאורעות אחרים וכן $P(A_i)\le p$ לכל i.

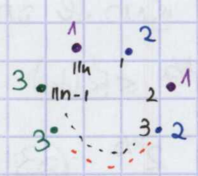
אם $e(d+1)p\le 1$, אז- $P(\bigwedge\bar{A}_i)>0$.

הוכחה - נבחר- $x_i=\frac{1}{d+1}$. $P(A_i)\le p\le\frac{1}{e(d+1)}\le\frac{1}{d+1}\left(1-\frac{1}{d+1}\right)^d$.

לכן מתקיימים תנאי המשפט. (וסיימנו).

דוגמא - יש $11n$ נקודות על המעגל. צבועים אותן ב-n צבעים בכל צבע בדיוק 11 נק'

← תמיד ניתן למצוא n נק' כך ש:



1. כל נק' צבועה בצבע אחר

2. אין 2 נק' סמוכות.

הוכחה - ← נבחר באקראי נק' אחת מכל צבע, בחירות ב"ת.

← נגדיר את המאורע A_i להיות: "נבחרו הנק' i ו- $i+1$".

← $P(A_i)\le\frac{1}{121}$ $(=:p)$

← בכמה מאורעות A_i תלוי? נסמן את הצבע של הנק' ה-i ב-c_i.

יש עוד 10 נק' בצבע c_i, כל אחת מהן משתתפת בשני מאורעות.

בנוסף המאורע A_{i-1} גם תלוי במאורע A_i. סה"כ 21.

כנ"ל גם עבור c_{i+1} ולכן $d=42$.

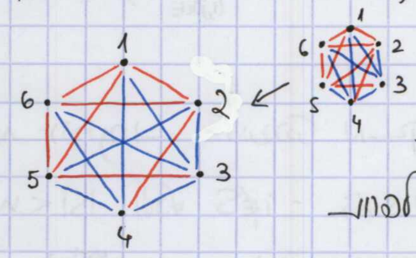
כיוון ש- $e\cdot\frac{43}{121}\approx 0.996\le 1$, אז- $P(\bigwedge_{i=1}^{n}\bar{A}_i)>0$

← זהו מרחב הסתברות סופי, לכן יש בחירה כזו.

הסתברות_ הרצאה - צ"ד - 2

דוגמא - משפט - (רמזי, Ramsey) - לכל $k\in\mathbb{N}$ יש $n\in\mathbb{N}$ כך שבכל יחס סימטרי (ואנטי רפלקסיבי) על $\{1,2,\dots n\}$ יש k מס' $a_1,\dots,a_k$ כך שכל הזוגות ביחס (כלומר a_iRa_j לכל $1\le i,j\le k$). או שיש k מס' כך שכל הזוגות לא ביחס.

דוגמא - $n=6,\ K=3$



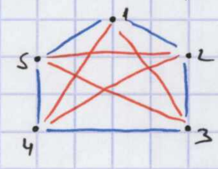
← נביט בקשתות היוצאות מ-1. יש 5 כאלו, לכן יש לפחות 3 מאותו צבע. נניח בה"כ אדום.

נסמן ב-a_1,a_2,a_3 את השכנים "האדומים" של 1.

אם כל הקשתות בין a_1,a_2,a_3 כחולות, אז יש משולש כחול.

אחרת, אם יש קשת אדומה (נניח a_2a_3) אז המשולש $1,a_2,a_3$ הוא משולש אדום.

לכן $n=6$ מספיק.



$\Leftarrow n=5$ לא מספיק.

$\Leftarrow 6$ הוא הטבעי המינימלי עבור כל היחסים. $k=3$ מספרים כנ"ל.

סימון - עבור k טבעי, מסמנים ב-$R(k)$ את הטבעי המינימלי עבורו מתקיים התנאי.

ראינו $R(3)=6$, $R(2)=2$, $R(4)=18$.

מההוכחה של רמזי נובע ש- $R(k)\le 4^k$

טענה - $2^{k/2}\le R(k)$

הוכחה - נצבע $2^{k/2}$ נק' באקראי. (כל זוג נמצא ביחס בהסת' $\frac{1}{2}$ ובאופן ב"ת בכל הבחירות האחרות).

נסמן ב-X את מס' ה-k-יות שכל זוג מהן נמצא ביחס. $E(X)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$

הסתברות - הרצאה 1-8/5

← $n=R(k)$, אם n המינימלי כך שבכל צביעה של הקשתות (בדיאגרמת Hasse של יחס על $\{1,...,n\}$), ובכחול יש או k מס' שכל הקשתות ביניהם בכחול או k כך שכל הקשתות ביניהם אדומות.

רוצים להראות - $R(k)\geq 2^{\lceil k/2\rceil}$, עבור k גדול מספיק.

צריך להראות שיש צביעה של הקשתות בכחול/באדום על התכונה הנ"ל.

← קבעו - $n=2^{\lceil k/2\rceil}$

← צבעו את קשתות הדיאגרמה באקראי (כחול בהסת' $\frac{1}{2}$ ואדום בהסת' $\frac{1}{2}$ באופן ב"ת בבחירות האחרות).

← נסמן ב-X את מס' ה-k-יות שכל הקשתות ביניהם כחולות: $E(X)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$

← לכל k מספרים נגדיר מ"מ מציין X_j שערכו 1 אם כל הקשתות כחולות ו-0 אחרת.

$$P(X_j=1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$$

← $X=\sum X_j$

$$E(X)=\sum E(X_j)=\sum\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$$

הכנה: לכל $0\leq k\leq n$ $\binom{n}{k}\leq\left(\frac{en}{k}\right)^k$

נראה: $\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\leq\left(\frac{en}{k}\right)^k$

הוכחה: $(1+x)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\geq\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}x^i$ (אם $x>0$)

$$\Rightarrow\frac{(1+x)^n}{x^k}\geq\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}x^{i-k}$$

אם $0<x\leq 1$ אז - $=\sum_{i=0}^{k}\frac{\binom{n}{i}}{x^{k-i}}\geq\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}$

נבחר $x=\frac{k}{n}$.

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\leq\frac{\left(1+\frac{k}{n}\right)^n}{\left(\frac{k}{n}\right)^k}\leq\frac{\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}\cdot\frac{k}{n}\cdot n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k}\leq\frac{e^k}{\left(\frac{k}{n}\right)^k}=\left(\frac{en}{k}\right)^k$$

$$E(X)\leq\left(\frac{en}{k}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}}=\left(\frac{en}{k}\cdot 2^{-\frac{k-1}{2}}\right)^k=\left(\frac{e2^{\lceil k/2\rceil}}{k}\cdot 2^{-\frac{k}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^k<\frac{1}{2}$$

$k>6$

← מא"ש מרקוב - $P(X\geq 1)\leq E(X)<\frac{1}{2}$

← יהי Y מ"מ שסופר k-יות אדומות - $P(Y\geq 1)<\frac{1}{2}$

$$P(X\geq 1 \text{ או } Y\geq 1)\leq P(X\geq 1)+P(Y\geq 1)<1$$

הסתברות- הרצאה 8/5-2

← בהסג' $O<$, $x=0$ וגם $y=0$

← יש צביעה של הקשתות ללא K-יה כחולה וללא K-יה אדומה.

← שימו ♡ שבהסג' $\xrightarrow{k\to\infty} 1$, צביעה מקרית לא מכילה K-יה מאותו צבע.

$$2^{k/2} \le R(k) \le 4^k$$

$$\sqrt{2} \le (R(k))^{1/k} \le 4$$

1. הראו ש- $\lim_{k\to\infty} (R(k))^{1/k}$ קיים.

2. מצאו את הגבול הנ"ל.

שאלת חזרה - נגדיר סדרת מ"מ: $X_0=X$

ולכל $n>0$ $\quad X_{n+1}\sim Pois(X_n)$

1) חשבו $E(X_n)$

2) -"- $V(X_n)$

3) -"- $Cov(X_m,X_n)$, $m>n$

4) הראו ש- X_j-X_i ו- X_m-X_n, בלתי מתואמים. $(m>n>j>i)$

תשובה-

1) ← תוחלת של מ"מ פואסוני עם פרמטר λ היא λ.

$$\leftarrow \quad E(X)=E_Y(E_X(X|Y))$$

$$E(X_{n+1}|X_n)=X_n$$

$$E(X_{n+1})=E_{X_n}(E_{X_{n+1}}(X_{n+1}|X_n))=$$

$$=E_{X_n}(X_n)=E(X_n)\overset{\text{אינדוקציה}}{=}\lambda$$

2) ← שונות של מ"מ פואסוני עם פרמטר λ היא λ.

$$\leftarrow \quad V(X)=V_Y(E_X(X|Y))+E_Y(V_X(X|Y))$$

$$V(X_{n+1})=V_{X_n}(E_{X_{n+1}}(X_{n+1}|X_n))+E_{X_n}(V_{X_{n+1}}(X_{n+1}|X_n))=$$

$$=V_{X_n}(X_n)+E_{X_n}(X_n)=V(X_n)+E(X_n)=V(X_n)+\lambda$$

$$\Rightarrow V(X_n)=n\lambda$$

3) ← $Cov(X,Y)=E(X|Y)-E(X)E(Y)$

$$E(X_m\cdot X_n)=E_{X_n}(E(X_m\cdot X_n|X_n))=E_{X_n}(X_n\cdot E(X_m|X_n))$$

$$E(X_m|X_n)=X_n$$

כי זהו אותו תהליך, רק מתחיל עם ערך של X_n - טיעון כמו בסעיף 1

הסתברות – הרצאה - 8/5 - 3

$=E_{X_n}(X_n\cdot X_n)=E(X_n^2)=V(X_n)+E(X_n)^2=$

$=n\lambda+\lambda^2$

$cov(X_m,X_n)=n\lambda+\lambda^2-\lambda^2=n\lambda$

Y) ← X ו-Y בלתי מתואמים אמ"מ $cov(X,Y)=0$.

← בילינאריות של ה-cov: $cov(aX+bY,Z)=$

$=a\,cov(X,Z)+b\,cov(Y,Z)$

וכנ"ל לינאריות במשתנה השני.

$cov(X_m-X_n,X_j-X_i)=cov(X_m,X_j-X_i)-cov(X_n,X_j-X_i)=$

$=cov(X_m,X_j)-cov(X_m,X_i)-cov(X_n,X_j)+cov(X_n,X_i)$

$=j\lambda-i\lambda-j\lambda+i\lambda=0$

← הסתברות רציפה (חלק 2 של הקורס)

מטרה←

$X=-0.3182\ldots$

$Y=0.521\ldots$