אלגברה לינארית, תשע"ו - פתרון תרגיל 9

1. חשבו את הקואורדינטות של הוקטורים לפי הבסיס הנתון:

(א) $v=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ ביחס לבסיס $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right\}$.

פתרון:

צריך לפתור את המערכת $\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&3&-2\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$

קבלנו פתרון $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ ולכן $[v]_B=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

(ב) $v=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ ביחס לבסיס $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$.

פתרון:

צריך לפתור את המערכת $\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&4\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$ קבלנו

פתרון $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ ולכן $[v]_B=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

(ג) $v=\begin{pmatrix}0\\3\\6\end{pmatrix}$ ביחס לבסיס $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\right\}$.

פתרון:

צריך לפתור את המערכת $\begin{pmatrix}1&0&2&0\\1&2&4&3\\0&3&6&6\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1/2\end{pmatrix}$

קבלנו פתרון $\begin{pmatrix}-1\\1\\1/2\end{pmatrix}$ ולכן $[v]_B=\begin{pmatrix}-1\\1\\1/2\end{pmatrix}$.

(ד) $v=\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$ ביחס לבסיס $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/2\\0\\-1/2\end{pmatrix}\right\}$.

פתרון:

צריך לפתור את המערכת $\begin{pmatrix}1&0&2&0\\1&2&4&3\\0&3&6&6\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1/2\end{pmatrix}$

קבלנו פתרון $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ ולכן $[v]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

2. מצאו מטריצה מייצגת להתאמות הליניאריות הבאות ביחס לבסיס הנתון:

(א) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x+y \end{pmatrix}$ ביחס לבסיס $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$.

פתרון:

צריך לחשב את הקואורדינטות של $T\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, כדי למצוא את הקואורדינטות צריך לפתור את המערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן $\left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

את הקואורדינטות של $T\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ חישבנו כבר בשאלה הקודמת

$\left[T\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

ולכן המטריצה המייצגת היא $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(ב) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$ ביחס לבסיס $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

פתרון:

בשביל הקואורדינטות של $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ צריך לפתור את המערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ולכן $\left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

הקואורדינטות של $T\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ הם כמובן אותו דבר $\left[T\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ולכן המטריצה המייצגת היא $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(ג) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י $\begin{cases} T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} \\ T\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} \\ T\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\end{cases}$ ביחס לבסיס $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\right\}$.

פתרון:

קל לראות את וקטורי הקואורדינטות: $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \left[T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]$, $\left[T\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\left[T\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

ולכן המטריצה המייצגת היא $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

(ד) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י $\begin{pmatrix}x+z\\x+y+z\\x-z\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ביחס לבסיס $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/2\\0\\-1/2\end{pmatrix}\right\}$.

פתרון:

הקואורדינטות של $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ זה בבירור $\left[T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

כדי לחשב את הקואורדינטות של $\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ צריך לפתור את המערכת $\begin{pmatrix}0&1&1/2&2\\1&0&0&2\\0&1&-1/2&0\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$.

ולכן $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \left[T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]_B$.

כדי לחשב את הקואורדינטות של $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ צריך לפתור את המערכת $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

ולכן $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \left[T\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}\right]_B$.

סך הכל קיבלנו שהמטריצה המייצגת היא $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. חשבו את הקואורדינטות של $T(v)$ לכל וקטור v שבשאלה 1 והתאמה לינארית T שבשאלה 2 (בהתאמה) לפי הבסיס הנתון.

פתרון:

(א) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = [T(v)]_B = [T]_B [v]_B$.

(ב) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = [T(v)]_B = [T]_B [v]_B$.

(ג) $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = [T(v)]_B = [T]_B [v]_B$.

(ד) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5/4 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = [T(v)]_B = [T]_B [v]_B$.