סעיף 3. מידה. הרחבת המידה מחוג למחצה לחוג הנוצר על ידיו. אדיטיביות ואדיטיביות- σ

<u>הגדרה 3.1</u> - פונקציה $\mu:\Sigma_\mu \to [0,\infty]$ נקראת **<u>מידה</u> אדיטיבית סופית** אם:

א) תחום Σ_μ של הפונקציה $\mu(A)$ הוא אלגברה או אלגברה למחצה.

ב) $\mu(\phi) = 0$

ג) הפונקציה $\mu(A)$ אדיטיבית, ז"א לכל פירוק זר סופי $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ של קבוצה $A \in \Sigma_\mu$ כאיחוד של קבוצות. $A_k \in \Sigma_\mu$ זרות בזוגות מתקיים $\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$. (תכונה זו נקראת גם אדיטיבית סופית)

<u>הערה</u> - אם הינו דורשים ש $\mu \neq \infty$ סעיף ב מיותר מפני ש- $\phi = \phi \cup \phi$ נובע כי $\mu(\phi) = 2\mu(\phi)$, ואז $\mu(\phi) = 0$.

לצורך שימושים רבים נרצה לקחת מידה המוגדרת על אוסף קטן של קבוצות ולהרחיב את ההגדרה שלה לאוסף גדול יותר: ל דוגמה: ניתןבקלות להרחיב את הגדרת השטח של מלבן למידה על איחוד סופי של מלבנים זרים בזוגות מן הצורה $a(\le) < x < (\le)b$, $c(\le) < y < (\le)d$.

<u>הגדרה 3.2</u> - המידה μ נקראת <u>הרחבה</u> של מידה m אם $\Sigma_m \subset \Sigma_\mu$ ולכל $A \in \Sigma_m$ מתקיים $\mu(A) = m(A)$.

<u>משפט 3.3</u> – לכל מידה $m(A)$ המוגדרת על אלגברה למחצה איזשהי Σ_m קיימת הרחבה אחת ויחידה $m'(A)$ שתחום ההגדרה שלו הוא $R(\Sigma_m)$, האלגברה המינימאלית מעל Σ_m.

<u>הוכחה</u> - לכל קבוצה $A \in R(\Sigma_m)$ קיים הפירוק זר (משפט 2.9) $(B_k \in \Sigma_m ; B_k \cap B_l = \phi, k \neq l)$

$A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$. נגדיר $m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m(B_k)$. נוכיח כי $m'(A)$ לא תלוי בבחירת הפירוק הזר. נתבונן בשני פירוקים זרים

$$B_i, C_j \in \Sigma_m \ , \ A = \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{j=1}^{r} C_j \ .$$

מפני שהחיתוכים $B_i \cap C_j \in \Sigma_m$, אז לפי האדיטיביות של המידה m

$$\sum_{i=1}^{n} m(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} m(B_i \cap C_j) = \sum_{j=1}^{r} m(C_j) \ .$$

אי-שליליות ואדיטיביות של הפונקציה $m'(A)$ ברורות.

לכן הוכחנו כי m' מידת הרחבה של m על האלגברה $R(\Sigma_m)$.

כדי להוכיח יחידות נתבונן בפירוק זר כלשהו $A=\bigcup_{k=1}^{n} B_k$. לכל הרחבה $\tilde{m}$ של m על $R(\Sigma_m)$

$$\tilde{m}(A)=\sum_k \tilde{m}(B_k)=\sum_k m(B_k)=m'(A)$$

והמידה $\tilde{m}$ מתלכדת עם m'. מש"ל. ▲

מאדיטיביות ואי-שליליות המידה נובעות תכונות חשובות.

<u>משפט 3.4</u> – תהי m מידה המוגדרת על אלגברה איזשהי R_m, והקבוצות $A_1,\ldots,A_n \in R_m$. לכן:

א) אם $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset A$ ול- $i \neq j$ מתקיים $A_i \cap A_j=\phi$, אז $\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \le m(A)$

ב) אם $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \supset A$, אז $\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \ge m(A)$

במיוחד אם $A \subset A'$, $A, A' \in R$, אז $m(A) \le m(A')$.

<u>הוכחה</u> – אם $A_1,\ldots,A_n$ זרות בזוגות וכולן מוכלות ב- A, אז לפי האדיטיביות

$$m(A)=\sum_{k=1}^{n} m(A_k)+m(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k)$$

מפני ש- $0 \le m(A \setminus \bigcup A_k)$, נקבל א).

עכשיו, לכל $A_1, A_2 \in R_m$

$$m(A_1 \cup A_2)=m(A_1)+m(A_2)-m(A_1 \cap A_2) \le m(A_1)+m(A_2).$$

ע"י אינדוקציה $m(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \le \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$. מאדיטיביות נובע

$m(A)=m(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)-m(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \setminus A) \le m(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)$ ומזה נובע ב). מש"ל. ▲

זה נכון גם לאלגברה למחצה כי מידת המשך לאלגברה לא שונה על הקבוצות מהאלגברה למחצה המקורית.

אדיטיביות (סופית) לא מספיקה בהרבה בעיות.

<u>הגדרה 3.5</u> – המידה m נקראת אדיטיבית בת-מניה (או σ - אדיטיבית) אם לכל סידרת הקבוצות $\{A_n\}$, $A_n \in \Sigma_m$, ומקיימות

$i \neq j$, $A_i \cap A_j=\phi$; $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, מתקיים $m(A)=\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$.

<u>דוגמאות:</u>

א) תהי $X=\{x_1,x_2,\dots\}$ קבוצה בת מניה ויהיו $P_n>0$ מספרים המקיימים $\sum_{n=1}^{\infty}P_n=1$.

קבוצות מדידות הן כל תת-הקבוצות של X. לכל $A\subset X$ נניח

$$m(A)=\sum_{x_n\in A}P_n .$$

המידה m זו אדיטיבית-σ, ומתקיים $m(X)=1$. הדוגמה חשובה בתורת ההסתברות.

ב) תהי X קבוצת נקודות רציונאליות בקטע $[0,1]$, ותהי Σ_m קבוצת חיתוכים A_{ab} של X וכל מיני קטעים $[0,1]\supset(a,b),[a,b),(a,b],[a,b]$. Σ_m אלגברה למחצה. נניח $m(A_{ab})=b-a$. המידה הזו אדיטיבית אך לא אדיטיבית-σ, כי מצד אחד $m(X)=1$, ומצד שני X היא סכום של בן-מניה נקודות שמידתה של כל נקודה היא 0.

בעתיד הקרוב נתעסק עם מידות אדיטיביות-σ.

<u>משפט 3.6</u> – אם מידה m המוגדרת על אלגברה למחצה Σ_m אדיטיבית-σ, אז גם ההרחבה שלה μ על האלגברה $R(\Sigma_m)$ אדיטיבית-σ.

<u>הוכחה</u> – תהיינה $n=1,2,\dots$, $B_n\in R(\Sigma_m)$, $A\in R(\Sigma_m)$

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n \quad , B_s\cap B_r=\phi \quad , s\neq r$$

לפי משפט 2.9 (על האלגברה המינימאלית), קיימות קבוצות A_j , $B_{ni}\in\Sigma_m$ כך ש-

$$A=\bigcup_j A_j \quad , B_n=\bigcup_i B_{ni} \quad , n=1,2,\dots$$

והאיחודים האלה סופיים, והקבוצות זרות בזוגות. נגדיר $C_{nij}=B_{ni}\cap A_j$, הן זרות בזוגות, ומתקיים

$$A_j=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_i C_{nij} \qquad , B_{ni}=\bigcup_j C_{nij}$$

לפי אדיטיביות-σ של m על Σ_m מקבלים

$$m(A_j)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_i m(C_{nij})$$

$$m(B_{ni})=\sum_j m(C_{nij})$$

לפי הגדרת המידה μ על $R(\Sigma_m)$

$$\mu(A)=\sum_j m(A_j)$$

$$\mu(B_n)=\sum_i m(B_{ni})$$

מזה נובע ש- $\mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)$ (הטורים מתכנסים). מש"ל. ▲

נוכיח את התכונות של מידות אדיטיביות- σ דומות לאלו שבמשפט 3.4.

מפני שהמשכיות שומרת על אדיטיביות- σ נוכל מהתחלה לחשוב על המידה כמוגדרת על <u>אלגברה</u> איזשהו R.

<u>משפט 3.7</u> – תהי m מידה אדיטיבית- σ ותהיינה $A, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ קבוצות מאלגברה R.

א) אם $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset A$; $A_i \cap A_j=\phi$, $i\neq j$, אז $\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)\le m(A)$.

ב) (אדיטיביות בת-מניה למחצה) אם $A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, אז $\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)\ge m(A)$.

<u>הוכחה</u> – לקבוצות A_k זרות בזוגות, לפי משפט 3.4, לכל n מתקיים $\sum_{k=1}^{n} m(A_k)\le m(A)$.

נשאף $n\to\infty$ ונקבל א).

מפני ש- R אלגברה הקבוצות $B_n=(A_n\cap A)\setminus\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\in R$.

מפני ש- $B_n\subset A_n$, $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ והקבוצות B_n זרות בזוגות $m(A)=\sum_{n=1}^{\infty} m(B_n)\le\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$. מש"ל. ▲

הערה – בתכונה א) לא משתמשים באדיטיביות-σ, זה נכון לכל מידה אדיטיבית.

בתכונה ב) אדיטיביות-σ חשובה (ראה דוגמא ב'). יותר מזה, התכונה ב) בעצם שקולה לאדיטיביות-σ.

באמת, נניח שמידה μ מוגדרת על אלגברה למחצה Σ. נניח שקבוצות $A, A_1, \dots, A_n, \dots$ שייכות ל-Σ, $A = \bigcup_k A_k$,

וקבוצות A_k זרות בזוגות. לפי התכונה א) מתקיים $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \le \mu(A)$. אם μ גם בעלת התכונה ב), אז

(הקבוצות A_k מכסות את A)

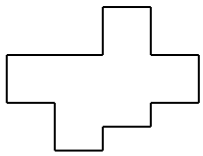
$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \ge \mu(A)$$

ולכן

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \mu(A)$$

לעיתים קרובות קל יותר לבדוק אדיטיביות בת-מניה למחצה (התכונה ב) במשפט 3.7) מאשר ישר אדיטיביות-σ.

משעשינו זה המשכנו מידה מ"מלבנים" על קבוצות "אלמנטאריות"



ברור שהתקדמות זו לא מספיקה, רוצים למדוד קבוצות "כלשהן" (אולי תוך כדי הגבלות טבעיות).