פתרון תרגיל בית 11 – אינפי 1

שאלה 1

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה רציפה בקטע $\left[0,a\right]$, כך שמתקיים $f\left(a\right)=f\left(0\right)$.

הוכיחו שקיים $x_0\in\left[0,\frac{a}{2}\right]$ כך ש- $f\left(x_0\right)=f\left(x_0+\frac{a}{2}\right)$.

פתרון

נתבונן בפונקציה $h(x)=f\left(x\right)-f\left(x+\frac{a}{2}\right)$. f רציפה ב $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ וכמו כן $f\left(x+\frac{a}{2}\right)$ רציפה ב $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ כהרכבת רציפות ($x+\frac{a}{2}$ רציפה ב $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ ו f רציפה ב $\left[\frac{a}{2},a\right]$) לכן בסה"כ h רציפה ב $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ כהפרש רציפות. בשל הנתון $f\left(a\right)=f\left(0\right)$ מתקיים

$$h(0)=f(0)-f(\frac{a}{2})$$

$$h(\frac{a}{2})=f(\frac{a}{2})-f(a)=f(\frac{a}{2})-f(0)$$

נשים לב ש $h(0)=-h(\frac{a}{2})$. אם $h(0)=-h(\frac{a}{2})=0$ סיימנו שכן עבור $x_0=0$ נקבל הדרוש. אחרת, בהכרח 0 בין $h(0)$ ל $h(\frac{a}{2})$ (כי הם שוני סימן) וממשפט ערך הביניים ביחס ל h ולקטע $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ נקבל שקיימת $x_0\in\left[0,\frac{a}{2}\right]$ כך ש $h(x_0)=0$. מכאן נסיק ש $f\left(x_0\right)=f\left(x_0+\frac{a}{2}\right)$.

מש"ל

שאלה 2

הראו שאם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ואם הגבולות של f ב- $\pm\infty$ קיימים וסופיים, אזי הפונקציה חסומה ב- $\mathbb{R}$.

פתרון

נניח ש $\lim_{x\to\infty} f(x)=A\in\mathbb{R}$ ו- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=B\in\mathbb{R}$. מכיון ש- $\lim_{x\to\infty} f(x)=A\in\mathbb{R}$ קיים $N>0$ כך שלכל $x>N$ מתקיים $\left|f(x)-A\right|<\frac{1}{2}$ או באופן שקול: $A-\frac{1}{2}<f(x)<A+\frac{1}{2}$. מכיון ש- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=B\in\mathbb{R}$ קיים $T<0$ כך שלכל $x<T$ מתקיים $\left|f(x)-B\right|<\frac{1}{2}$ או באופן שקול: $B-\frac{1}{2}<f(x)<B+\frac{1}{2}$. f רציפה ב $\mathbb{R}$ ולכן רציפה בפרט ב $[T,N]$. לכן עפ"י משפט ויירשטראס מתקבלים מינימום ומקסימום בקטע $[T,N]$. מכאן קיימים $m,M\in\mathbb{R}$ כך ש $m\le f(x)\le M \quad \forall x\in[T,N]$. יהיו $Q=\min\left\{A-\frac{1}{2},B-\frac{1}{2},m\right\},P=\max\left\{A+\frac{1}{2},B+\frac{1}{2},M\right\}$. קל לראות מכל הטיעונים לעיל ש $Q\le f(x)\le P$ לכל $x\in\mathbb{R}$. מכאן הפונקציה חסומה.

מש"ל

שאלה 3

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ונניח ש- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$. הראו שהפונקציה מקבלת מינימום ב- $\mathbb{R}$.

פתרון

(דומה מאד לשאלה שהופיעה בתרגול) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ובפרט מוגדרת באפס. יהי $L=f(0)\in\mathbb{R}$. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ ולכן בפרט קיימים $N>0$ ו- $T<0$ כך שלכל $x\in[N,\infty)\cup(-\infty,T]$ מתקיים $L<f(x)$.(*) f רציפה ב $\mathbb{R}$ ולכן רציפה בפרט ב- $[T,N]$. לכן עפ"י משפט ויירשטראס מתקבל מינימום בנקודה כלשהי $x_0\in[T,N]$. כלומר קיים $m\in\mathbb{R}$ כך ש $f(x_0)=m\le f(x) \quad \forall x\in[T,N]$. $0\in[T,N]$ ולכן בפרט $L=f(0)\ge m$. מכאן ומ-(*) נקבל מיד ש- $f(x_0)=m\le f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$. מכאן שהפונקציה מקבלת מינימום ב- $\mathbb{R}$.

מש"ל

שאלה 4

גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $2^{x^e}\cdot e^{x^x}$

פתרון

$$\left[2^{x^e}\cdot e^{x^x}\right]'=\left[2^{x^e}\right]'e^{x^x}+2^{x^e}\left[e^{x^x}\right]'=\left[e^{\ln 2^{x^e}}\right]'e^{x^x}+2^{x^e}e^{x^x}\left[x^x\right]'=$$

$$=\left[e^{x^e\ln 2}\right]'e^{x^x}+2^{x^e}e^{x^x}\left[e^{x\ln x}\right]'=2^{x^e}ex^{e-1}\ln 2\cdot e^{x^x}+2^{x^e}e^{x^x}x^x\left[\ln x+1\right]=$$

$$2^{x^e}e^{x^x}\left[ex^{e-1}\ln 2+x^x\left[\ln x+1\right]\right]$$

ב. $\dfrac{\tan(e^{x^2})}{\sqrt{(\log x)^2+1}}$

פתרון

$$\left[\frac{\tan\left(e^{x^2}\right)}{\sqrt{(\log x)^2+1}}\right]'=\frac{\left[\tan\left(e^{x^2}\right)\right]'\sqrt{(\log x)^2+1}-\tan\left(e^{x^2}\right)\left[\sqrt{(\log x)^2+1}\right]'}{(\log x)^2+1}=$$

$$\frac{\dfrac{2xe^{x^2}}{\left[\cos e^{x^2}\right]^2}\sqrt{(\log x)^2+1}-\tan\left(e^{x^2}\right)\dfrac{2\log x}{2x\sqrt{(\log x)^2+1}}}{(\log x)^2+1}$$

שאלה 5

תהי $f(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. אנו יודעים כי יש לפונקציה זו אי רציפות סליקה ב0. האם הפונקציה המתקבלת לאחר סילוק אי הרציפות גזירה באפסס? כלומר, האם $g(x)=\begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$ גזירה באפס? (הוכח/הפרך לפי הגדרת הנגזרת)

הפרכה

נראה שלא קיים הגבול $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0} = g'(0)$. הגבול הזה לא קיים כי קיימות שתי סדרות $y_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}, x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ שתיהן שואפות לאפס ושונות מאפס אך $f(y_n)\to -1, f(x_n)\to 1$ ולכן לא יכול להיות קיים גבול לפי היינה, ולכן הפונקציה אינה גזירה באפס.

מש"ל

שאלה 6

הוכיחו שלמשוואה $2x=\cos x$ יש פתרון יחיד.

פתרון

נגדיר את הפונקציה $h(x)=2x-\cos x$. פתרון למשוואה הנ"ל הוא כמובן אפס של h. כעת, $h(0)=-1<0$ וגם $h(1)=2-\cos(1)>0$ ולכן לפי משפט ערך הביניים חייבת להיות נקודה $c\in(0,1)$ כך ש $h(c)=0$, כלומר קיים פתרון למשוואה.

נניח בשלילה שיש יותר מפתרון אחד, כלומר קיימים c_1,c_2 כך ש- $h(c_1)=h(c_2)=0$. לפי משפט רול קיימת נקודה c_3 כך ש $h'(c_3)=0$ אבל $h'(x)=2+\sin x>0$ בסתירה.

מש"ל

שאלה 7

הוכיחו שלכל $1\le a<b\le 2$ מתקיים $2\cdot(\ln b-\ln a)\le b^2-a^2$.

פתרון

יהיו $1\le a<b\le 2$. עלינו להוכיח ש- $2\cdot(\ln b-\ln a)\le b^2-a^2=(b-a)(b+a)$. שקול להוכיח ש- $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}\le\frac{b+a}{2}$. הפונקציה $\ln(x)$ גזירה ב- $(0,\infty)$ ובפרט גזירה ב $[a,b]$. לכן מתקיימים תנאי משפט הערך הממוצע של לגרנז'. עפ"י המשפט קיימת $c\in(a,b)$ כך ש- $\frac{1}{c}=\ln'(c)=\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$ (*). מתקיים $1\le a<c<b\le 2$ ולכן $a+b>2$ ומכאן $0<\frac{2}{a+b}<1$. $1\le a<c$ ולכן $c>1>\frac{2}{a+b}$. מכאן $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\ln'(c)=\frac{1}{c}<\frac{a+b}{2}$ כדרוש.

מש"ל