פתרון תרגיל 3

שאלה 1

יהיו קבוצות לא ריקות $A,B\subseteq\mathbb{R}$, נניח שמתקיים $\forall a\in A,\forall b\in B: a\le b$ (כל איבר בA קטן שווה מכל איבר בB).

א.הוכיחו: $\sup A\le\inf B$

ב. נניח שמתקיים שיוויון בסעיף א', כלומר, $\sup A=\inf B$. הוכיחו/הפריכו: $A\cap B\neq\phi$. ג. אם הוכחתם בסעיף ב', מה הוא האיבר המשותף לA וB? אם הפרכתם, מתי כן יהיה לשתי הקבוצות איבר משותף?

פתרון

א. נניח בשלילה ש-$\sup A>\inf B$. ניקח $\varepsilon=\frac{\sup A-\inf B}{2}>0$ אזי $\sup A-\varepsilon=\frac{\sup A+\inf B}{2}$ שזה אמצע הקטע $[\inf B,\sup A]$. אבל לפי משפט קיים $a\in A$ כך ש- $a>\sup A-\varepsilon$.

$\sup A-\varepsilon=\frac{\sup A+\inf B}{2}=\inf B+\varepsilon$ אבל לפי משפט קיים $b\in B$ כך ש- $b<\inf B+\varepsilon=\sup A-\varepsilon<a$. ובסיכום מצאנו $b<a$ בסתירה לנתון.

<u>דרך נוספת</u>
נניח בשלילה ש $\sup A>\inf B$. $\sup A$ הוא החסם העליון של A ובפרט חסם מלעיל **מינימלי** של A. מכיון ש $\sup A>\inf B$ נסיק ש- $\inf B$ **אינו** חסם מלעיל של A. כלומר, קיים $a_0\in A$ כך ש$a_0>\inf B$. $\inf B$ הוא החסם התחתון של B בפרט חסם מלרע **מקסימלי** של B. מכיון ש $a_0>\inf B$ נסיק ש a_0 **אינו** חסם מלרע של B. כלומר, קיים $b_0\in B$ כך ש $a_0>b_0$. זה כמובן סותר את הנתון: $\forall a\in A,\forall b\in B: a\le b$. מכאן בהכרח $\sup A\le\inf B$.

ב. הפרכה: ניקח $A=(0,1)$ ו- $B=(1,2)$. $\sup A=\inf B=1$ אבל $A\cap B=\phi$

ג. האיבר המשותף יתקיים כאשר לA יהיה מקסימום, ולB יהיה מינימום. ואז $\sup A\in A$ ו- $\inf B\in B$.

מש"ל

שאלה 2

הוכיחו ישירות על פי ההגדרה:

א. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+(-1)^n}{3n}=\frac{2}{3}$

ב. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\cos(n^2)=0$

ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4+\sqrt{n}}=0$

פתרון

א. יהי $\varepsilon>0$. אזי קיים $n_0>\frac{1}{3\varepsilon}$ (כי קבוצת הטבעיים לא חסומה מלעיל). לכן לכל $n\ge n_0$ מתקיים $n>\frac{1}{3\varepsilon}$ או באופן שקול $\frac{1}{3n}<\varepsilon$. לכן לכל $n\ge n_0$ מתקיים $\left|\frac{2n+(-1)^n}{3n}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{2n+(-1)^n-2n}{3n}\right|=\frac{1}{3n}<\varepsilon$ וקיבלנו הדרוש.

ב. יהי $\varepsilon>0$. אזי קיים $n_0>\frac{1}{2\varepsilon}$. לכל $n\ge n_0$ מתקיים $n>\frac{1}{2\varepsilon}$ או באופן שקול $\frac{1}{2n}<\varepsilon$. מכיון ש $|\cos(x)|\le 1$ לכל $x\in\mathbb{R}$, נקבל שלכל $n\ge n_0$ מתקיים $\left|\frac{1}{2n}\cos(n^2)-0\right|=\frac{1}{2n}\left|\cos(n^2)\right|\le\frac{1}{2n}\cdot 1<\varepsilon$ וקיבלנו הדרוש.

ג. יהי $\varepsilon>0$. אזי קיים $n_0>\frac{9}{\varepsilon^2}$. לכל $n\ge n_0$ מתקיים $n>\frac{9}{\varepsilon^2}$ או באופן שקול $\frac{3}{\sqrt{n}}<\varepsilon$. נקבל שלכל $n\ge n_0$ מתקיים $\left|\frac{3}{4+\sqrt{n}}-0\right|=\frac{3}{4+\sqrt{n}}<\frac{3}{\sqrt{n}}<\varepsilon$ וקיבלנו הדרוש.

מש"ל

שאלה 3

הוכיחו על פי השלילה של הגדרת הגבול:

א. $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+3}\neq 1$

ב. לכל $L\in\mathbb{R}$ הסדרה $(-1)^n$ אינה מתכנסת ל- L.

ג. לכל $L\in\mathbb{R}$ הסדרה $(-1)^n n$ אינה מתכנסת ל- L.

פתרון

א. יהי $\varepsilon=\frac{1}{2}$. אזי לכל n אם ניקח $n_0=n$ נקבל ש

$$\left|\frac{n_0+1}{2n_0+3}-1\right|=\left|\frac{n+1}{2n+3}-1\right|=\left|\frac{n+1-(2n+3)}{2n+3}\right|=\left|\frac{-n-2}{2n+3}\right|=\frac{n+2}{2n+3}\geq\frac{n+2}{2n+4}=\frac{1}{2}=\varepsilon$$

ב. נוכיח תחילה לכל $L\neq -1$. נבחר $\varepsilon=|1+L|>0$. לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $n_0\geq n$ אי זוגי. מתקיים: $\left|(-1)^{n_0}-L\right|=\left|-1-L\right|=\left|1+L\right|\geq\varepsilon$. כעת נראה שגם $L=-1$ אינו הגבול. ניקח $\varepsilon=2>0$. לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $n_0\geq n$ זוגי ומתקיים:

$\left|(-1)^{n_0}-(-1)\right|=\left|1+1\right|=2\geq\varepsilon$.

<u>הערה:</u> היה אפשר לפרק גם למקרים $L>0, L=0, L<0$, אך הפעם זה רק מאריך את הפתרון.

ג. יהי $\varepsilon=1$. לכל $n\in\mathbb{N}$ יהי $n_0>\max\{n,|L|+1\}$ זוגי (קבוצת הטבעיים לא חסומה מלעיל ולכן יש n_0 כזה וברור שיש זוגי כזה) כעת $n_0>n$ ומתקיים:

$n_0>|L|+1\geq L+1$ ולכן $n_0-L>1$. נקבל ש $\left|(-1)^{n_0}n_0-L\right|=\left|n_0-L\right|>1=\varepsilon$.

מש"ל

חשבון אינפיניטסימלי 1
מרצה: דר' הורוביץ
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

שאלה 4

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ויהי $L \in \mathbb{R}$. אילו מהתנאים הבאים שקולים לכך שהסדרה מתכנסת ל- L? הוכיחו שקילות (גרירה כפולה) או הפריכו (באמצעות דוגמה נגדית).

א. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שאם $n > n_0$ אז $|a_n - L| < \varepsilon$ (שימו לב: ההבדל בין תנאי זה לבין הגדרת הגבול כפי שהגדרנו בכיתה הוא שכאן אנו דורשים $n > n_0$ במקום $n \geq n_0$).
ב. קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 עבורו לכל $n \geq n_0$ מתקיים $|a_n - L| < M \cdot \varepsilon$.
ג. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $M \in \mathbb{R}$ וקיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $|a_n - L| < M \cdot \varepsilon$.

פתרון

א. הוכחה- הגדרת הגבול גוררת את תנאי (א) באופן מיידי שכן אם $n > n_0$ אז בפרט $n \geq n_0$. בכיוון ההפוך נניח שתנאי (א) מתקיים. יהי $\varepsilon > 0$ (בשביל הוכחת הגדרת הגבול) עלינו למצוא $n_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_1$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$. מהנתון קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$. יהי $n_1 = n_0 + 1$. ראשית $n_1 \in \mathbb{N}$. שנית לכל $n \geq n_1 = n_0 + 1$ מתקיים ש $n > n_0$ ולכן $|a_n - L| < \varepsilon$ כנדרש.

ב. הוכחה- הגדרת הגבול גוררת את תנאי (ב) באופן מיידי שכן עבור $M = 1$ נקבל בדיוק את הגדרת הגבול. בכיוון השני יהי $\varepsilon > 0$ (בשביל הוכחת הגדרת הגבול) עלינו למצוא $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$.
מהנתון קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $\varepsilon' > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $|a_n - L| < M\varepsilon'$. נשים לב שבהכרח $M > 0$ (מדוע?). כמו כן התנאי מתקיים לכל $\varepsilon' > 0$ ובפרט עבור $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{M} > 0$. נקבל שלכל $n \geq n_0$ (n_0 הוא הטבעי שתלוי ב $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{M}$) מתקיים $|a_n - L| < M\varepsilon' = M\dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$ וקיבלנו הדרוש.

ג. הפרכה- תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ הסדרה הקבועה אפס. נראה ש- $L=\frac{1}{2}$ מקיים את תנאי (ג). ודאי שהוא אינו מקיים את הגדרת הגבול כי הסדרה מתכנסת לאפס ולא ל $\frac{1}{2}$ (הגבול הוא יחיד). יהי $\varepsilon>0$ (לצורך הוכחת תנאי (ג)) מכיון שקבוצת הטבעיים לא חסומה מלעיל אזי קיים $M\in\mathbb{N}\subseteq\mathbb{R}$ המקיים $M\geq\frac{1}{2\varepsilon}$ ומכאן שקול $\left|a_n-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<M\varepsilon$ וזאת לכל n ולכן בפרט עבור $n_0=1$ למשל נקבל שלכל $n\geq n_0$ מתקיים $|a_n-L|<M\varepsilon$.

הערה: הפרכנו את שקילות ההגדרות אך ניתן להוכיח שהגדרת הגבול דווקא כן גוררת את סעיף (ג).

(למעשה סעיף (ב) גורר את סעיף (ג) אך הגרירה בכיוון ההפוך אינה נכונה כפי שהראינו).

מש"ל