תרגול 8

משפט גורדן עבור אופרטור עם ערך עצמי יחיד

יהי $T:V\to V$ כך שהפולינום האופייני של T הוא חזקה של $x-\lambda$.

אזי יש ל T הצגה אלכסונית בלוקים, עם בלוקי ג'ורדן $J_m[\lambda]$. הצגה זו יחידה עד כדי סדר הבלוקים.

הערה

נשים לב שהאופרטור $T-\lambda I$ נילפוטנטי ונשתמש בעובדה ש $[T-\lambda I]_B=[T]_B-\lambda I$

ואז

$$[T]_B=\begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & O & \cdots & O \\ O & J_{m_2}(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & J_{m_k}(0) \end{pmatrix}+\lambda I=\begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda) & O & \cdots & O \\ O & J_{m_2}(\lambda) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & J_{m_k}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

דוגמא 1

נג'רדן את המטריצה $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

נשים לב ש $P_A(x)=(x-2)^3$ ו $m_A(x)=(x-2)^3$.

במקרה זה ברור שצורת ג'ורדן של A היא $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

נראה איך מוצאים מטריצה מג'רדנת P עבור A.

שלב א

מכיוון ש

$$[T]_B=\begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & O & \cdots & O \\ O & J_{m_2}(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & J_{m_k}(0) \end{pmatrix}+\lambda I=\begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda) & O & \cdots & O \\ O & J_{m_2}(\lambda) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & J_{m_k}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

מספיק למצוא את המטריצה המג'רדנת P עבור המטריצה הנילפוטנטית $A-2I$.

שלב ב

סדר הנילפוטנטיות הוא 3

הערה

אם $T:V\to V$ אופרטור נקבל ש $\operatorname{Im}T^k\subseteq\operatorname{Im}T^{k-1}$ ואם T נילפוטנט מסדר n נקבל ש

$\operatorname{Im}T^{n-1}\subseteq KerT$ ובאופן כללי נקבל ש

$\operatorname{Im}T^{n-1}\subseteq KerT\cap\operatorname{Im}T^{n-2}\subseteq KerT\cap\operatorname{Im}T^{n-3}\subseteq KerT\cap\operatorname{Im}T^{n-4}...\subseteq KerT\cap\operatorname{Im}T\subseteq KerT$

המשך שלב ב

נשים לב ש V_2 הוא המרחב העצמי של הערך עצמי 2 ולכן אם $v\in V_2$ אז $(A-2I)v=0$ ולכן

$v\in KerT$.

ז"א אם נתבונן במטריצה $A-2I$ בתור האופרטור T אז נקבל ש $col(A-2I)=\operatorname{Im}T\wedge KerT=V_2$

ומתקיים: $Col(A-2I)\subseteq V_2 \cap Col(A-2I)^2 \subseteq V_2$

אנחנו כבר יודעים שהבסיס יהיה מסלול אחד מאורך 3 , כלומר יש למצוא וקטור אחד במרחב השמאלי, ואז המסלול שמסתיים בו הוא הבסיס.

המטריצה $(A-2I)^2=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ ז"א $Col(A-2I)^2=Span\{(e_1)\}$ ז"א קיים v כך ש $(A-2I)^2v=e_1$. $v=e_3$.

ואז המסלול שלנו הוא

$$\{e_1=(A-2I)^2e_3,(A-2I)e_3,e_3\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

<u>דוגמא 2</u>

$$A=\begin{pmatrix}-7&3&4&-9\\2&1&-1&2\\-6&3&5&-6\\7&-2&-3&9\end{pmatrix}$$

הפולינום האופייני הוא $P_A(x)=(x-2)^4$ והפולינום המינימאלי הוא $m_A(x)=(x-2)^2$.

לכן יש שתי אפשרויות לבסיס המג'רדן

אפשרות 1

שני מסלולים מאורך 2.

אפשרות 2

מסלול אחד מאורך 2 ושני מסלולים מאורך 1.

נשים לב ש $Col(A-2I)\subseteq V_2$ ומתקיים

$$Col(A-2I)=span\{(A-2I)e_1,(A-2I)e_2\}=span\left\{\begin{pmatrix}-9\\2\\-6\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\\3\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

לכן יש שני מסלולים מאורך 2

ונקבל ש

$$P=((A-2I)e_1,e_1,(A-2I)e_2,e_2)=\begin{pmatrix}-9&1&3&0\\2&0&-1&1\\-6&0&3&0\\7&0&-2&0\end{pmatrix}$$

<u>דוגמא למטריצה עם יותר מערך עצמי אחד</u>

נמצא את הצורה הקנונית של ג'ורדן של המטריצה $A=\begin{pmatrix}-3&1&-1\\-7&5&-1\\-6&6&-2\end{pmatrix}$.

הפולינום האופייני הוא $P_A(x)=(x+2)^2(x-4)$ והפולינום המינימאלי הוא $m_A(x)=(x+2)^2(x-4)$.

הערכים העצמיים הם: -2,4.

ולכן המטריצה הקנונית של גורדן היא $A=\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$.

נמצא מטריצה מג'רדנת.

נמצא מסלול אחד באורך 2 עבור הערך העצמי -2.

נמצא את $V_{-2}\cap Col(A+2I)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

כעת $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-7&7&-1\\-6&6&0\end{pmatrix}$

ואז המסלול שלנו הוא

$\left\{(A+2I)\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

עבור הערך עצמי 4 נקבל את הווקטור העצמי $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

ולכן המטריצה המג'רדנת היא $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$

__תרגיל ממבחן 2012 מועד א__

מצא את צורת ג'ורדן של המטריצה $A=\begin{pmatrix}n&n-1&n-2&.&1\\0&n&n-1&.&2\\.&0&n&.&3\\.&.&.&.&.\\0&0&0&.&n\end{pmatrix}$

__פתרון__

נחשב תחילה את הפולינום האופייני

$$f_A(x)=|xI-A|=\begin{vmatrix} x-n & 1-n & 2-n & . & -1 \\ 0 & x-n & 1-n & . & -2 \\ . & 0 & x-n & . & -3 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & x-n \end{vmatrix}=(x-n)^n$$

n הוא הערל עצמי היחיד מכיוון שהוא השורש היחידי של הפולינום האופיני.

נבדוק מהו הריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי שקיבלנו ז"א נחשב את המימד של מרחב האפס של המטריצה

$$A-nI=\begin{pmatrix} 0 & n-1 & n-2 & . & 1 \\ 0 & 0 & n-1 & . & 2 \\ . & 0 & 0 & . & 3 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 \end{pmatrix}$$

מספר המשתנים החופשיים הוא 1 ולכן הריבוי הגיאומטרי הוא 1.

מספר בלוקי גורדן הוא 1 ולכן המטריצה המבוקשת היא

$$J=\begin{pmatrix} n & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & n & . & & . \\ . & & . & . & . \\ . & & & . & 1 \\ 0 & & & & n \end{pmatrix}$$