תרגיל 6

1. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. עבור קבוצה $A\subseteq X$ נגדיר את הפונקציה $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ שנקראת הפונקציה האופיינית של A לפי

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

הוכיחו כי X קשירה אם ורק אם לכל $A\subseteq X$ (למעט $\emptyset, X$) הפונקציה χ_A אינה רציפה.
פתרון:

X קשירה אם ורק אם אין $A\subseteq X$ (למעט $\emptyset, X$) שהיא סגוחה. לכן מספיק להראות ש χ_A רציפה אם ורק אם A סגוחה. אבל באמת, נניח ש A סגוחה ותהי $U\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה אז

$$\chi_A^{-1}(U) \in \{\emptyset, A, A^c, X\}$$

ולכן χ_Aרציפה. מצד שני, אם χ_A רציפה אז

$$A = \chi_A^{-1}(\{1\})$$

$$A = \chi_A^{-1}((0.5, 1.5))$$

ולכן A גם פתוחה וגם סגורה.

2. האם המרחבים הבאים קשירים?

(א) $(\mathbb{R}\cup\{p\},\tau)$ כאשר $\tau = P(\mathbb{R})\cup\{O\subseteq\mathbb{R}\cup\{p\} : |O^c| < \aleph_0\}$.
פתרון:

לא קשיר. הקבוצה $\{1\}$ סגוחה, כי ניתן לראות שגם היא וגם המשלים פתוחות, לפי הגדרת הטופולוגיה.

(ב) $(\mathbb{N},\tau)$ כאשר $\tau = \{\emptyset, \mathbb{N}, O_n\}\forall n$, $O_n = \{1, ..., n\}$.
פתרון:

המרחב קשיר. אין קבוצה סגוחה לא טריוויאלית, כי כל קבוצה פתוחה שאינה ריקה חייבת להכיל את 1, ולכן לא תיתכן קבוצה פתוחה שאינה ריקה, שגם המשלימה שלה פתוחה.

(ג) $\mathbb{Z}$ עם הטופולוגיה המושרית מהמטריקה הp־ אדית.
פתרון:

המרחב אינו קשיר. הוכחנו בעבר שהקבוצה $p\mathbb{Z}$ היא סגוחה.

3. (תת מרחב קשיר של מרחב לא קשיר)
יהא X מרחב לא קשיר אז קיימת קבוצה סגוחה V לא טרי' כך ש $X = V \uplus V^C$.
הוכיחו כי כל תת מרחב קשיר $A \subseteq X$ מקיים $A \subseteq V^C$ או $A \subseteq V$.
פתרון: אחרת A נחתך עם V, V^c בצורה לא ריקה ואז $A = [V \cap A] \uplus \left[V^C \cap A\right]$ סתירה לקשירות של A.

4. יהו $A, B \subseteq X$ קבוצות פתוחות (לא ריקות) כך ש $A \cap B$ ו $A \cup B$ קשירים. הוכיחו שA, B קשירות.
פתרון: נניח בה"כ ש $X = A \cup B$.

נוכיח כי A קשיר.

נניח בשלילה כי A אינו קשיר אזי קיימות פתוחות (ב A) לא טרי' V_1, V_2 כך ש $A = V_1 \uplus V_2$.

מתרגיל קודם נקבל כי $A \cap B \subseteq V_1$ או $A \cap B \subseteq V_2$. (כי זהו תת מרחב קשיר של מרחב לא קשיר)

לכן בה"כ $A \cap B \subseteq V_1$.

מהגדרת תת מרחב קיימות U_i כך ש $V_i = A \cap U_i$. מכיוון ש A פתוחה נקבל כי V_i גם פתוחות ב $X = A \cup B$. כעת $X = [V_1 \cup B] \cup V_2$ ו $V_1 \cup B, V_2$ פתוחות. נראה שהחיתוך שלהם ריק ונקבל סתירה לקשירות של X. אכן

$$V_2 \cap (V_1 \cup B) = (V_2 \cap V_1) \cup (V_2 \cap B) = \emptyset \cup (V_2 \cap B) = (V_2 \cap B) =$$

$$= V_2 \cap (V_2 \cap B) \subseteq V_2 \cap (A \cap B) \subseteq V_2 \cap V_1 = \emptyset$$

.

5. הוכיחו: אם $f : X \to Y$ הומיאומורפיזם, ו$A \subseteq X$, אז A הומיאומרפי ל$f(A)$.
(הערה: באותו אופן אפשר גם להוכיח ש $X \setminus A \cong Y \setminus f(A)$)
פתרון:

נסתכל על: $f|_A : A \to f(A)$. ברור שהפונקציה חח"ע ועל. בנוסף, היא רציפה, כי f רציפה, והוכחנו שצמצום טווח ותמונה של פונקציה רציפה היא עדיין פונקציה רציפה.
באותו אופן, $f|_{f(A)}^{-1} : f(A) \to A$ רציפה, ולכן $f|_A$ היא הומיאומורפיזם.

6. תהא $X = \mathbb{R}$ עם טופלוגית סורגנפרי τ_S : הוכיחו כי

(א) קטעים מהצורה (a, b) פתוחים עבור $a < b$.
פתרון:
אכן $(a, b) = \cup_n [a + \frac{1}{n}, b)$ ולכן לפי הגדרה פתוח.

(ב) קטעים מהצורה $(a, b]$ אינם פתוחים ואינם סגורים עבור $a < b$.
פתרון:

אינו פתוח: נניח בשלילה כי הוא כן פתוח אזי $(a, b] = \cup_{i \in I} [a_i, b_i)$. כיוון ש $b \in (a, b]$ קיים $i \in I$ כך ש $b \in [a_i, b_i)$ כלומר $b < b_i$ ולכן קיים $b < x < b_i$.
כעת הוא מקיים כי $x \in [a_i, b_i)$ ולכן $x \in \cup_{i \in I} [a_i, b_i) = (a, b]$ מה שאומר כי $x \leq b$ סתירה.

באופן דומה , אינו סגור: נניח בשלילה כי הוא סגור אזי המשלים $(-\infty, a] \cup (b, \infty)$ פתוח אבל אינו פתוח משיקולים דומים.

(ג) קטעים מהצורה $[a,b)$ סגורים (בנוסף לכך שהם פתוחים ע"פ הגדרה) עבור $a<b$.

פתרון:

המשלים הינו $(-\infty,a)\cup[b,\infty)$. נראה שכל אחת פתוחה ולכן גם האיחוד פתוח. אכן $(-\infty,a)=\cup_n[a-n,a)$ פתוח ו $[b,\infty)=\cup_n[b,b+n)$ פתוח.

7. תהא $X=\mathbb{R}$ עם טופלוגית סורגנפרי τ_S (הפתוחות = איחודים כלשהם של קטעים מהצורה $[a,b)$). עבור הקבוצות הבאות מצאו את הפנים והסגור שלהם:

(א) $A=(0,1)$

פתרון:

הקטע $(0,1)=\cup_n[\frac{1}{n},1)$ הוא פתוח ולכן שווה לפנים שלו. בנוסף, $(0,1)$ אינו סגור כי המשלים $(-\infty,0]\cup[1,\infty)$ אינו פתוח (בגלל ש $(-\infty,0]$ אינו פתוח). בנוסף $[0,1)$ כן סגור (המשלים שלו פתוח) והוא מכיל את $(0,1)$ לכן $[0,1)\subseteq\overline{(0,1)}\neq(0,1)$ ולכן $\overline{(0,1)}=[0,1)$

(ב) $A=[0,1)$

פתרון:

הקטע $[0,1)$ פתוח וגם סגור ולכן הוא שווה לפנים ששווה לסגור.

(ג) $A=(0,1]$

פתרון:

הקטע $(0,1]$ לא פתוח ולא סגור ומחישובים דומים מקבלים כי הפנים שווה $(0,1)$ והסגור שווה $[0,1]$.

(ד) $A=[0,1]$

פתרון:

הקטע $[0,1]$ פתוח ולא סגור ומחישובים דומים מקבלים כי הפנים שווה $[0,1)$ והסגור שווה $[0,1]$.

8. תהא $X=\mathbb{N}$ עם הטופולוגיה $\tau=\{\{1,\dots,n\}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{\emptyset,\mathbb{N}\}$ עבור הקבוצות הבאות מצאו את הפנים והסגור שלהם:

(א) $A=\{1,\dots,n\}$ עבור n קבוע כלשהוא.

פתרון:

A פתוחה לפי הגדרה ולכן שווה לפנים שלה.

הקבוצות הסגורות (הלא טרי') הם $\{\{n+1,n+2,\dots\}:n\in\mathbb{N}\}$ ולכן ישנה קבוצה סגורה אחת שמכילה את Aשהיא $\mathbb{N}$ ולכן היא הסגור שלה.

(ב) $A=\{2,3,\dots\}=\mathbb{N}\backslash\{1\}$

פתרון:

A סגורה ולכן שווה לסגור שלה.

הקבוצות הפתוחות הן רישא של מספרים $\{1,\dots n\}$ ולכן אף אחת לא מוכלת ב A ולכן הפנים שלה שווה $\emptyset$.

(ג) $A=\{1,2,3,4,6,7,8\dots\}=\mathbb{N}\backslash\{5\}$

פתרון:

הקבוצות הסגורות הן סיפא של מספרים $\{n+1,n+2,\dots\}$ ולכן אף אחת לא מכילה את A פרט ל $\mathbb{N}$ לכן הסגור שלה.

הקבוצות הפתוחות הן רישא של מספרים $\{1,\dots n\}$ ולכן הקבוצה הפתוחה המקס' שמוכלת ב A היא $\{1,2,3,4\}$.

(ד) $A=2\mathbb{N}=\{2n:n\in\mathbb{N}\}$
פתרון:

הקבוצות הסגורות הן סיפא של מספרים $\{n+1,n+2,\dots\}$ ולכן אף אחת לא מכילה את A פרט ל $\mathbb{N}$ לכן הסגור שלה.

הקבוצות הפתוחות הן רישא של מספרים $\{1,\dots n\}$ ולכן שאף אחת לא מוכלת ב A ולכן הפנים שלה שווה $\emptyset$.

(ה) $A\subseteq\mathbb{N}$
פתרון:

פנים: במידה ו $1\in A$ הפנים של A תהא הרישא $\{1,\dots,n\}$ הכי ארוכה שמוכלת ב A ואחרת $\emptyset$.

סגור: במידה ו $A\neq\emptyset$ אז הסגור יהיה $\{\min A,\min A+1,\dots\}$ הסיפא הכי ארוכה שמכילה את A . אחרת, הסגור יהיה הסיפא $\emptyset$.

9. הוכיחו/הפריכו: (הערה: $int(A)=\mathring{A}$ הוא הפנים של A, ו $cl(A)=\bar{A}$ הוא הסגור של A)

(א) אם $A\subseteq B$ אזי $int(A)\subseteq int(B)$ ו $cl(A)\subseteq cl(B)$
פתרון:

הוכחה: נניח $A\subseteq B$ אזי $int(A)\subseteq A\subseteq B$ היא קבוצה פתוחה שמוכלת ב B ולכן $int(A)\subseteq int(B)$ כי $int(B)$ הפתוחה המקס' שמוכלת ב B. באופן דומה $A\subseteq B\subseteq cl(B)$ היא קבוצה סגורה שמכילה את A ולכן $cl(A)\subseteq cl(B)$.

(ב) $int(A_1\cup A_2)=int(A_1)\cup int(A_2)$
פתרון: הפרכה::

$(\supseteq)$ מתקיים כי $A_i\subseteq A_1\cup A_2$ ולכן $int(A_i)\subseteq int(A_1\cup A_2)$ ולכן גם האיחוד.

$(\subseteq)$לא נכון: למשל $A_1=(1,2),A_2=[2,3)$ אזי $int(A_1\cup A_2)=(1,3)$ אבל $int(A_1)\cup int(A_2)=(1,2)\cup(2,3)$

(ג) $int(A_1\cap A_2)=int(A_1)\cap int(A_2)$
פתרון:

$(\supseteq)$ $int(A_1)\cap int(A_2)\subseteq A_! \cap A_2$ פתוחה ולכן $int(A_1)\cap int(A_2)\subseteq int(A_1\cap A_2)$

$(\subseteq)$ תהא $O\subseteq A_1\cap A_2$ פתוחה אזי $O\subseteq A_i$ ולכן $O\subseteq int(A_i)$ ולכן גם בחיתוך. ומכאן ש $int\left(A_1\cap A_2\right)\subseteq int(A_1)\cap int(A_2)$

(ד) תהיינה $\{A_i\}_{i\in I}$אוסף תתי קבוצות אזי $cl(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}cl(A_i)$
פתרון: הפרכה:

$(\supseteq)$לכל i מתקיים כי $A_i\subseteq\bigcup_{i\in I}A_i$ ולכן $cl(A_i)\subseteq cl(\bigcup_{i\in I}A_i)$ ולכן גם $\bigcup_{i\in I}cl(A_i)\subseteq cl(\bigcup_{i\in I}A_i)$

$(\subseteq)$ לא נכון: נבחר $A_i=\{i\}$ לכל $i\in\mathbb{Q}$ ואז $\bigcup_{i\in I}cl(A_i)=\bigcup_{i\in I}\{i\}=\mathbb{Q}$ אבל $cl(\bigcup_{i\in I}A_i)=cl(\mathbb{Q})=\mathbb{R}$