6.01.15 1

שיטות נומריות מתקדמות - הרצאה - 11

המשך שיטות ספקטרליות:

מחפשים פתרון במרחב H $\quad H=\mathrm{span}\{\varphi_1,\varphi_2,\dots\}$

$$u(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(x)$$

נחפש קירוב בתת-מרחב $H_m=\mathrm{span}\{\varphi_1,\dots,\varphi_m\}$.

2 שאלות:

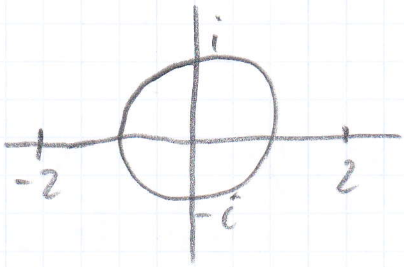
1. איזה מרחב? נובע מהמד"ח, למשל מרחבי סובולב H^v
2. איזה בסיס? למשל כובעים (עם תומך קומפקטי) = אלמנטים סופיים
3. איך מקרבים? גלרקין או ריץ.

ראינו בסיסים: - פוריה

- טורי חזקות. יש בעיה $u(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$

נניח $u(x)=\frac{1}{1+x^2}$ בקטע $[-2,2]$

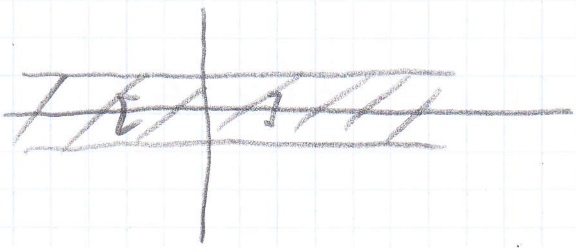
אבל רדיוס ההתכנסות הוא רק 1!



$$u(x)=1-x^2+x^4-x^6+\dots$$

ככל שנקח יותר נקודות אני נתרחק מהפתרון!

ראינו שבטור פוריה יש התכנסות ברצועה ולכן אם אין סינגולריות בציר הממשי, הפונקציה תתכנס.



נרצה בכל זאת להשתמש בטורי חזקות —
קירוב בפולינומי צ'בישב

נתונים פולינומי צ'בישב $T_n(x)$

נקרב באמצעות $u(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x)$

פולינומי צ'בישב:

הגדרה:

$$T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$$

$$T_0(x)=1$$

$$T_1(x)=x$$

$$T_2(x)=2x^2-1$$

$$\vdots$$

כלל נסיגה:

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$$

פולינומים אלה הם אורתוגונליים ב $[-1,1]$ עם פונק' משקל $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

וזה גורר, הוכחנו, כל השורשים פשוטים ונמצאים ב- $[-1,1]$.

תכונות של פולינומי צ'בישב:

1. $|T_n(x)|\le 1$, נובע מהגדרה כקוסינוס.

2. אם נרשום $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x)$

אז המקדמים a_n זהים לפיתוח של $f(\cos\theta)$ בטור קוסינוסים.

6.01.15 (2)

שכן אם מציבים $x=\cos\theta$

$$g(\theta)=f(\cos\theta)=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nT_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos n\theta$$

אם $g\in C^k$ $k\geq 2$ אז $|a_n|\leq C\cdot\frac{1}{n^k}$

ולכן גם טורי צ'בישב יקיימו את אותה תכונה של המקדמים כמו בפוריה.

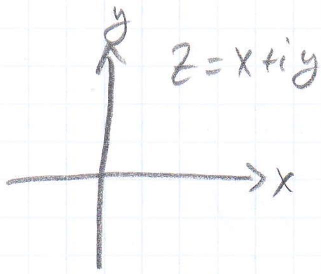
$f\in C^k \iff g\in C^k$ (cos גזירה אינסוף פעמים)

3. נסמן $f_N(x)=\sum_{n=0}^{N}a_nT_n(x)$

$$e_N=\sup_x|f(x)-f_N(x)|=\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}a_nT_n(x)\right|\overset{\text{השגיאה}}{\leq}$$

$$\leq\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|=O(N^{1-k})$$

לכן קצב ההתכנסות הוא מהיר!



$z=x+iy$

תחום ההתכנסות

נסמן: $z=x+iy$

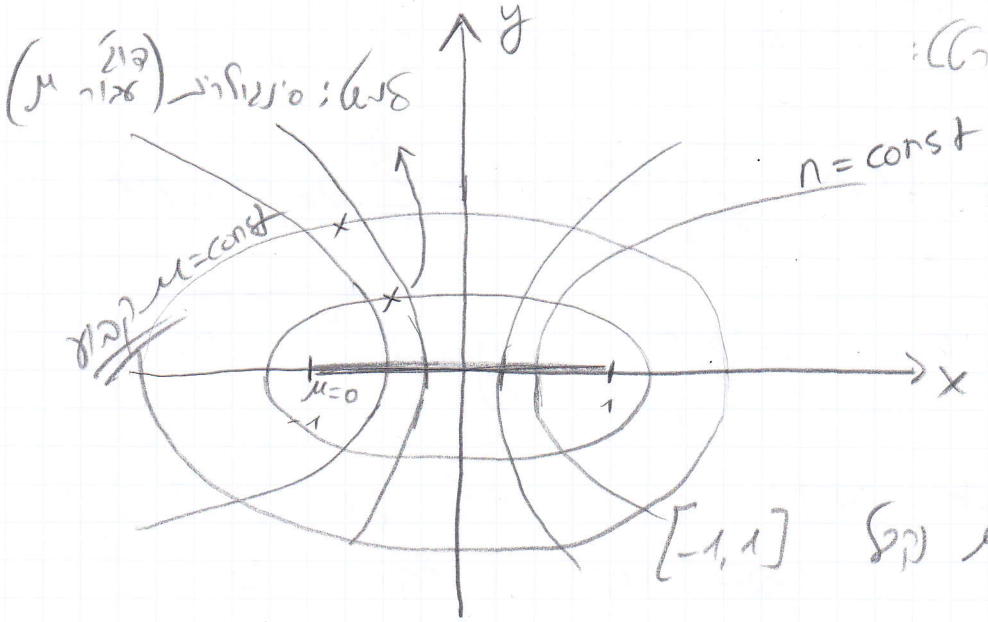
החלפת משתנים: $\begin{cases}x=\cosh(\mu)\cos\eta\\ y=-\sinh(\mu)\sin\eta\end{cases}$

קואורדינטות אליפטיות

כאשר $\mu\in[0,\infty)$ $\eta\in[0,2\pi)$

$$J=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial\mu} & \frac{\partial x}{\partial\eta}\\ \frac{\partial y}{\partial\mu} & \frac{\partial y}{\partial\eta}\end{pmatrix}\neq 0$$ מלבד בקטע $[-1,1]$

ננסה לשרטט:



עבור $\mu=0$ נקבל $[-1,1]$

עבור μ קבוע אם נסמן

$$a=\cosh\mu$$
$$b=-\sinh\mu$$

נקבל אליפסות

$$\begin{cases} x = a\cos\eta \\ y = b\sin\eta \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

עבור η קבוע

$$\begin{cases} x = a\cosh\mu \\ y = -b\sinh\mu \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

ולכן נקבל היפרבולות

- אם $f(z)$ פונקציה מרוכבת עם קטבים $z_1,z_2,\dots,z_k\in\mathbb{C}$ נסמן את הקטבים בקואורדינטות אליפטיות:

$$z_1 \longmapsto (\mu_1,\eta_1)$$
$$z_2 \longmapsto (\mu_2,\eta_2)$$
$$\vdots$$
$$z_k \longmapsto (\mu_k,\eta_k)$$

6.01.15 (3)

נסמן $\mu_0 = \min_j |\mu_j|$

נפתח את f בטור צ'בישב

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(z)$$

<u>טענה</u>: הטור מתכנס בתחום $\mu < \mu_0$.

<u>מסקנה</u>: הטור מתכנס על כל הקטע הממשי $[-1,1]$.

המסקנה מבטיחה שתהיה התכנסות ונוכל לעבוד עם טורי צ'בישב ללא הבעיה שהייתה בטורי חזקות.

<u>הוכחת הטענה</u>: נסמן $\theta = \eta + i\mu$

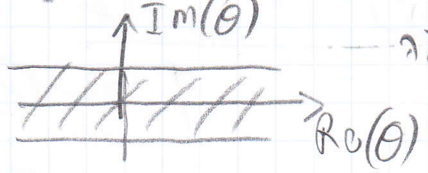
$$z = \cos\theta = \cos(\eta + i\mu) =$$

$$\cosh\mu \cos\eta - i \sinh\mu \sin\eta$$

<u>הרצאה</u>

התכנסות של טור צ'בישב ב-z (שקול) $\Longleftrightarrow$ התכנסות של טור פורייה ב-θ. (של $f(\cos\theta)$)

$f(\cos\theta)$ מתכנס ברצועה



ל-$f(\cos\theta)$ נקודות סינגולריות ב: $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$.

נסמן $\theta_0 = \min |\mathrm{Im}\,\theta_k|$

טור פורייה של $f(\cos\theta)$ מתכנס ב- $|\mathrm{Im}\,\theta| \le \theta_0$

$\blacksquare$

<u>השאלה הבאה היא איך למצוא את המקדמים?</u>

רוצים לפתור $Lu = f$ עם תנאי שפה.

נגדיר את השארית $R(v) = Lv - f$

נחפש $u_m \in H_m$ מהצורה $u_m = \sum_{k=1}^{m} a_k \varphi_k$

φ_k או מקטעים או פורייה או צ'בישב (לפי תשובה לשאלה השנייה)

נסמן $\psi_1,\dots,\psi_m \in H$ פונקציות מבחן.

נמצא מקדמים $a_1,\dots,a_m$ כך ש

$$R(u_m) \perp \operatorname{span}\{\psi_1,\dots,\psi_m\}$$

זה אומר $\langle Lu_m - f, \psi_j\rangle = 0$ לכל $1\le j\le m$

$$\iff \langle Lu_m,\psi_j\rangle = \langle f,\psi_j\rangle$$

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \underbrace{\langle L\varphi_k,\psi_j\rangle}_{b_{kj}} = \underbrace{\langle f,\psi_j\rangle}$$

$$\underset{\vec{a}}{\begin{pmatrix} a_k \end{pmatrix}} \qquad B=(b_{ij}) \text{ מטריצה} \qquad \underset{\vec{f}}{\begin{pmatrix} f_j \end{pmatrix}}$$

ולכן מציאת המקדמים תהיה ברדוקציה למשוואה ליניארית

$$B\vec{a} = \vec{f}$$

איזה ψ נקח?

① גלרקין אומר לקחת $\boxed{\psi_k = \varphi_k}$ (אין הפונק' מה בסיס)

② שיטת ריבועים מינימליים $\boxed{\psi_k = L\varphi_k}$

רוצים למצוא u_m כך ש $\|Lu-f\|^2$ מינימאלית.

תזכורת: אם $Ax=b$ הפתרון מקיים

$$A^*Ax = A^*b \quad \text{(בריבועים מינימליים)}.$$

באופן פורמלי, כלומר, פותרים

$$L^*Lu_m = L^*f$$

6.01.15 | (4)

בפרט:

$$\langle L^*Lu_m, \varphi_k\rangle = \langle L^*f, \varphi_k\rangle$$

$$\Rightarrow \langle Lu_m, \underbrace{L\varphi_k}_{\psi_k}\rangle = \langle f, \underbrace{L\varphi_k}_{\psi_k}\rangle$$

ולכן פתרון המערכת שקול למציאת פתרון בריבועים מינימליים.

(3) מומנטים $\psi_k = x^k$

(4) שיטת קולוקציה collocation

פסודו - ספקטרלי pseudo-spectral

$$\psi_k(x) = \delta(x-x_k)$$

שקול לדרוש ש- $R(u_m)$ מתאפס בנק' $x_1,\dots,x_k$

איזה נקודות כדאי לבחור?

שיטת גלרקין: $\psi_k=\varphi_k$

$$\int R(u_m)\phi_k\,dx = 0$$

נקרב את האינטגרל בשיטת גאוס עם k נקודות,
פונק' משקל,

$$\int R(u_m)\phi_k\,dx \approx \sum b_k R(u_m(x_j))\phi_k(x_j)=0$$

אם x_j הן האפסים של צ'בישב אז $R(u_m(x_j))=0$

- העדיפות היא להשתמש בשיטת קולוקציה עם אפסים של פולינומי צ'בישב שבה מקרב באופן טוב את הפתרון של גלרקין.

סוף
שיטות ספקטרליות

שיטות איטרטיביות לפתרון מערכות לינאריות

שיטות multigrid / multilevel

(פותחו ע"י מתמטיקאי ישראלי בשם אחי ברנדט בשנות ה70)

לקוח מ:
A multigrid tutorial - Briggs, Henson & Mc Cormick

<u>בעיה לדוגמא</u> במימד 1

$$\begin{cases} -u'' + \sigma u = f(x) & 0<x<1 \\ u(0)=u(1)=0 \\ \sigma \geq 0 \end{cases}$$

<u>ב-n מימדים</u>

$$\begin{cases} -\Delta u + \sigma u = f & x \in \Omega \\ u(\partial\Omega)=0 & x \in \partial\Omega \\ \sigma \geq 0 \end{cases}$$

$\sigma=0$: פואסון

$\sigma>0$: משוואת הלמהולץ Helmholtz

<u>בהפרשים סופיים:</u>

נקרב את u'' ע"י הפרש מרכזי.

$$-\frac{u_{j-1}-2u_j+u_{j+1}}{\Delta x^2} + \sigma u_j = f(x_j) = f_j$$

עבור פתרון $u_1, \dots, u_{n-1}$ (בלי הקצוות)

נקבל מערכת

6.01.15 (5)

$$\begin{pmatrix} 2+\sigma\Delta x^2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2+\sigma\Delta x^2 & -1 & 0 \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2+\sigma\Delta x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix} \Delta x^2$$

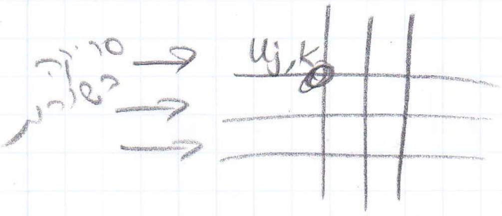
$\underline{j=1}$

$$-\frac{\cancel{u_0}-2u_1+u_2}{\Delta x^2}+\sigma u_1=f_1$$

$$(2+\sigma\Delta x^2)u_1-u_2=\Delta x^2 f_1$$

המטריצה לעיל סימטרית, נקראת טופליץ (לאורך האלכסונים הערכים קבועים), נקראת tri band (שלושה אלכסונים $\neq 0$)

חישבנו עבור $\sigma=0$ ע"ע ו"ע והע"ע-ים חיוביים ממש.



<u>בשני מימדים:</u>

$$\Delta x^2=\Delta y^2=h^2$$

$$-\frac{u_{j+1,k}+u_{j-1,k}+u_{j,k+1}+u_{j,k-1}-4u_{j,k}}{\Delta x^2}+\sigma u_{j,k}=f_{j,k}$$

סורקים בשורות/עמודות לקבלת סדר של המקדמים.

$$\begin{pmatrix} B & -aI_{n-1} & 0 & 0 & \cdots \\ -aI_{n-1} & B & -aI_{n-1} & 0 & \cdots \\ 0 & -aI_{n-1} & B & -aI_{n-1} & 0 \cdots \\ & & \ddots & & \\ & & & & B \end{pmatrix}$$

נקבל מטריצה בלוקים $B\in M_{n-1}$

B סימטרית, טופליץ וחיובית ממש.

והמטרה תהיה לפתור מערכת לינארית מהצורה הזו.

<u>שיטות איטרטיביות</u> לפתרון $Au=f$

$\det A \neq 0$

נניח שיש פתרון מקורב v

נגדיר את השגיאה $e = u - v$

" " השארית $r = f - Av$

(יותר נוח לעבוד עם השארית - שכן אין לנו את u!)

שוב ישנה בעיה אם ל-A יהיו ע"ע קטנים מאוד שאז ב-A^{-1} תהיה שגיאה גדולה..

$$Ae = Au - Av = f - Av = r$$

$\Leftarrow$ הקשר בין השגיאה לשארית הוא $Ae = r$

<u>משוואת פואסון</u> $\Longleftrightarrow$ $\sigma = 0$ (במימד 1)

נסתכל על שיטת יעקבי Jacobi.

$$-u_{j+1} + 2u_j - u_{j-1} = h^2 f$$

$$\Rightarrow u_j = \frac{1}{2}\left(h^2 f_j + u_{j-1} + u_{j+1}\right)$$

בהינתן ניחוש $u_j^0,\ j=0,\dots,n$ נחשב:

$$u_j^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(h^2 f_j + u_{j-1}^{(k)} + u_{j+1}^{(k)}\right) \quad (*)$$

קל לראות שאם $u_j^{(k)} = u_j$ הפתרון האמיתי

$$u_j^{(k+1)} = u_j$$

כלומר, הפתרון האמיתי הינו <u>נקודת שבת</u> של האיטרציה.
השלב הבא הוא להראות כי (*) היא העתקה <u>מכווצת</u>. אז בהכרח ק"ים פתרון והוא יחיד, האיטרציות תתכנסנה לנקודת השבת והיא תהיה יחידה.

6.01.15 (6)

נכתוב את השיטה (Jacobi) כ:

Splitting method

$$A = D - L - U$$

D היא האלכסון של A

U- המשולש העליון

L- המשולש התחתון

$$(D-L-U)u = f \quad \Longleftarrow$$

האלכסון שונה מאפס $\leftarrow$ $Du = (L+U)u + f$

$$\Rightarrow \quad u = \underbrace{D^{-1}(L+U)}_{\text{נסמן } R_J} u + D^{-1} f$$

איטרציית יעקובי הן בדיוק:

$$u^{(k+1)} = R_J u^{(k)} + D^{-1} f$$

שיטה כללית יותר: **Weighted Jacobi**

קומבינציה לינארית של $u^{(k)}$ ו־$u^{(k+1)}$

$$v^{(k+1)} = w\left[R_J v^{(k)} + D^{-1} f\right] + (1-w) v^{(k)}$$

$$\Rightarrow \quad v^{(k+1)} = \underbrace{\left[(1-w)I + wR_J\right]}_{\text{נסמן } R_J^w} v^{(k)} + w D^{-1} f$$

השארית:

$$r^{(k)} = f - A v^{(k)}$$

צ"ל:

$$v^{(k+1)} = v^{(k)} + w D^{-1} r^{(k)}$$

הוכחה:

$$v^{(k)} + w D^{-1} r^{(k)} =$$

$$v^{(k)} + w D^{-1} \left[f - A v^{(k)} \right] =$$

$$= \underbrace{\left[I - w D^{-1} A \right]} v^{(k)} + w D^{-1} f = \#$$

$$= I - w D^{-1}(D - L - U) = \underbrace{I - w I + w D^{-1}(L+U)}_{= R_J^w}$$

$$\# = R_J^w v^{(k)} + w D^{-1} f = v^{(k+1)}$$

$\blacksquare$ וההתכנסות תהיה תלויה בע"ע של המטריצה R_J^w.