אלגברה ליניארית 1 (89112) \ פרופ' שניידר ופרופ' עדין
בחינת סיום (מועד א')

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
מותר להשתמש במחשבון פשוט. אין להשתמש בכל חומר עזר אחר.
במבחן 3 פרקים, בכל אחד מהם בחירה בין שאלות. נא לציין במפורש אילו תשובות במחברת מיועדות לבדיקה, אחרת תיבדקנה התשובות הראשונות בכל פרק.
נא להסביר ולנמק בבירור כל פתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים.

בהצלחה!

פרק I: (36 נקודות) ענה על 3 מתוך 4 השאלות. משקל כל שאלה 12 נקודות.

1. תהי A קבוצת וקטורים סופית במרחב וקטורי V. הראה שניתן לבחור תת-קבוצה בת"ל $B \subseteq A$ כך ש-: $span(B) = span(A)$.

2. תהי A קבוצת וקטורים בת"ל (סופית) במרחב וקטורי V. הוכח: אם $B \subseteq A$ אז גם B בת"ל.

3. תהי $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ מטריצה. הוכח: $\dim R(A) \le \min(m,n)$, כאשר $R(A)$ הוא מרחב השורות של A.

4. תהיינה B, A מטריצות כך שהמכפלה AB מוגדרת. הוכח: $C(AB) \subseteq C(A)$, כאשר $C(A)$ הוא מרחב העמודות של A.

פרק II: (12 נקודות) ענה על שאלה אחת מתוך 2. משקל כל שאלה 12 נקודות.

5. האם הוקטורים $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ פורשים את $(\mathbb{Z}_3)^3$? אם לא, השלם אותם לקבוצה פורשת.

6. מצא את המטריצה ההפכית של $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+i & 1 \\ 0 & 1 & 2+i \end{pmatrix}$ ב-$\mathbb{C}^{3\times3}$, אוסף המטריצות מסדר 3×3 מעל $\mathbb{C}$. בדוק את תשובתך.

פרק III: (52 נקודות) ענה על 4 מתוך 5 השאלות. משקל כל שאלה 13 נקודות.

7. האם הקבוצות הבאות הן תת-מרחבים של $\mathbb{R}^3$? נמק היטב.

א) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| x=y+z,\ \ x+y=z\right\}$

ב) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| x+2y+3z\ge 0\right\}$

8. א) עבור אילו ערכים של a, קבוצת הוקטורים $\left\{\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}2\\a\\a\end{pmatrix}\right\}$

היא בסיס ל- $\mathbb{R}^3$?

ב) כאשר הוקטורים הנ״ל אינם בסיס ל- $\mathbb{R}^3$ (כלומר כאשר הם תלויים ליניארית), תאר על-ידי משוואה את המרחב הנפרש על ידם.

9. מצא את הצגת הוקטור $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ כצירוף ליניארי של אברי הבסיס

$$\left\{\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\mathbf{u}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

10. תהי

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1&3\\-1&1&0&2&1\\1&1&3&0&2\\1&2&5&3&6\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times5}$$

א) מצא בסיסים למרחבים $C(A)$, $R(A)$ ו- $N(A)$.

ב) מצא את הפתרון הכללי למערכת $A\mathbf{x}=\begin{pmatrix}2\\4\\-3\\3\end{pmatrix}$.

11.

א) מצא את המטריצה ההפכית ל- $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\2&0&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$. בדוק את תשובתך.

ב) מצא מטריצה B המקיימת $AB=2A+I$ (עבור המטריצה A מהסעיף הקודם).